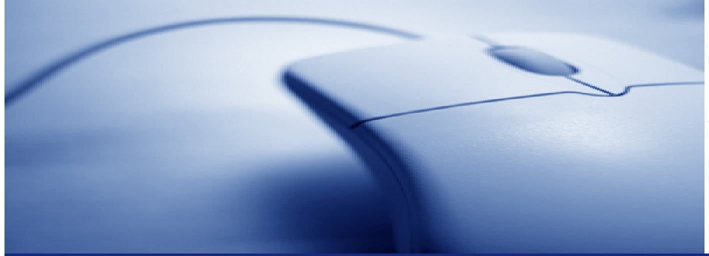


SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统

第五章 连续时间系统的复频域分析

南京邮电大学

通信与信息工程学院

- 连续信号与系统的复频域分析概述
- 5.1 拉普拉斯变换
- 5.2 拉普拉斯变换的性质
- 5.3 拉普拉斯反变换
- 5.4 连续系统的复频域分析
- 5.5 系统函数
- 5.6 连续系统的模拟
- 本章要点
- 作业

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\boxed{\delta(t-\tau)}d\tau$$

时域分析

$$y(t) = x(t) * \boxed{h(t)}$$

傅里叶变换

拉普拉斯变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\boxed{e^{j\omega t}}d\omega$$

频域分析

$$Y(\omega) = X(\omega)\boxed{H(\omega)}$$

变换域分析

$$s = \sigma + j\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\boxed{e^{st}}ds$$

复频域分析

$$Y(s) = X(s)\boxed{H(s)}$$

时域、频域和复频域分析之间的关系

频域分析和复频域分析的对比

- 傅里叶变换（频域）分析法
  - 在信号分析和处理方面十分有效：分析谐波成分、系统的频率响应、信号的失真、取样、滤波等
  - 要求信号满足狄里赫勒条件
  - 反变换有时不太容易
  - 只能求零状态响应
- 拉普拉斯变换（复频域）分析法
  - 在连续、线性、时不变系统的分析方面十分有效
  - 可以看作广义的傅里叶变换
  - 变换式简单
  - 扩大了变换的范围
  - 为分析系统响应提供了规范的方法

连续信号与系统的复频域分析主要内容

- 拉普拉斯变换
- 典型信号的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的性质
- 拉普拉斯反变换
- 连续系统的复频域分析
- 系统函数
- 由系统函数的零、极点分析系统特性
- 连续系统的稳定性
- 连续系统的模拟

第五章 连续时间系统的复频域分析

- 连续信号与系统的复频域分析概述
- 5.1 拉普拉斯变换
- 5.2 拉普拉斯变换的性质
- 5.3 拉普拉斯反变换
- 5.4 连续系统的复频域
- 5.5 系统函数
- 5.6 连续系统的模拟
- 本章要点
- 作业

5.1.1 拉普拉斯变换的定义

5.1.2 拉氏变换的收敛域

5.1.3 常用信号的拉氏变换

5.1.1 拉普拉斯变换的定义

从傅里叶变换到拉普拉斯变换：

信号不满足绝对可积条件的原因是：

当$t \to \infty$或$t \to -\infty$时，$f(t)$不趋于零。

解决的方法：

一．引进广义函数（傅氏变换）

二．拉氏变换（无需引进广义函数）

若 $f(t)$ 不满足狄里赫勒条件，我们为了能获得变换域中的函数，人为地用一个实指数函数$e^{-\sigma t}$去乘$f(t)$ 。

只要σ 取得合适，很多函数(几乎所有常用的函数)都可以满足绝对可积的条件。

称σ为衰减因子； $e^{-\sigma t}$为收敛因子。

取 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换：

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \quad =\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

它是$\sigma+j\omega$的函数，可以表示成 $F_b(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$

其傅里叶反变换为

$$f(t)e^{-\sigma t} =\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

故 $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

记 $s=\sigma+j\omega$ 为复频率，则变换式可以改写为

$$F_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$ 双边拉普拉斯正变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}ds$$ 双边拉普拉斯反变换

将正变换的积分下限改为0^-，得到单边拉普拉斯变换：

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$ 单边拉普拉斯正变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}ds,\quad t>0$$ 单边拉普拉斯反变换

即 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，和$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

或 （原函数）$f(t)\leftrightarrow F(s)$（象函数）

正变换的积分下限用 0^- 的目的是：把 $t=0$ 时出现的冲激包含进去。这样，利用拉氏变换求解微分方程时，可以直接引用已知的初始状态 $f(0^-)$。

以后只讨论单边拉氏变换：

（1）$f(t)$ 和 $f(t)u(t)$ 的拉氏正变换 $F(s)$ 是一样的。

（2）反之，当已知 $F(s)$，求原函数时，也无法得到 $t<0$ 时的 $f(t)$ 表达式。

5.1.2（单边）拉氏变换的收敛域

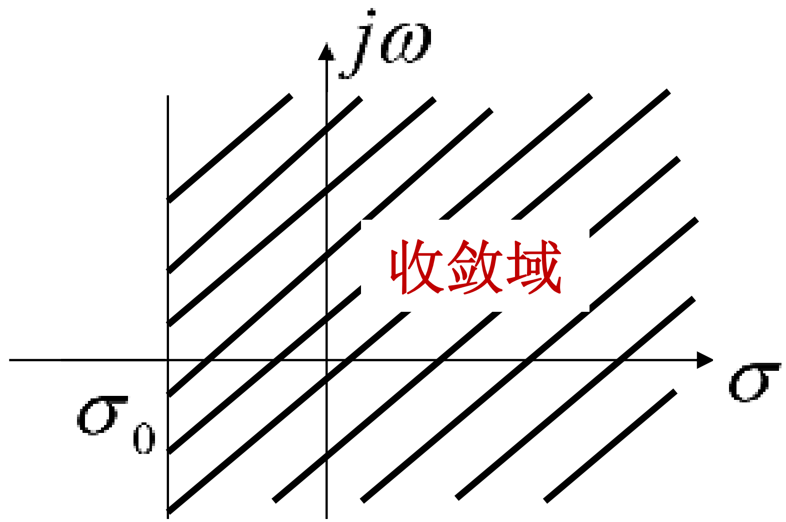
信号 $f(t)$ 乘以收敛因子后，有可能满足绝对可积的条件。是否一定满足，还要看 $f(t)$ 的性质与 σ 的相对关系。通常把使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积条件的 σ 值范围称为拉氏变换的收敛域。

若 $f(t)$ 乘以收敛因子 $e^{-\sigma t}$ 后，存在下列关系

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \qquad (\sigma > \sigma_0)$$

则收敛条件为 $\sigma > \sigma_0$

满足上述条件的最低限度的 σ 值，称为 σ_0 (绝对收敛横坐标)。



S 平面

因果信号取，t≥0

例1 因果信号$f_1(t)= e^{\alpha t}\boxed{u(t)}$，求其拉普拉斯变换。

双边变单边拉式变换

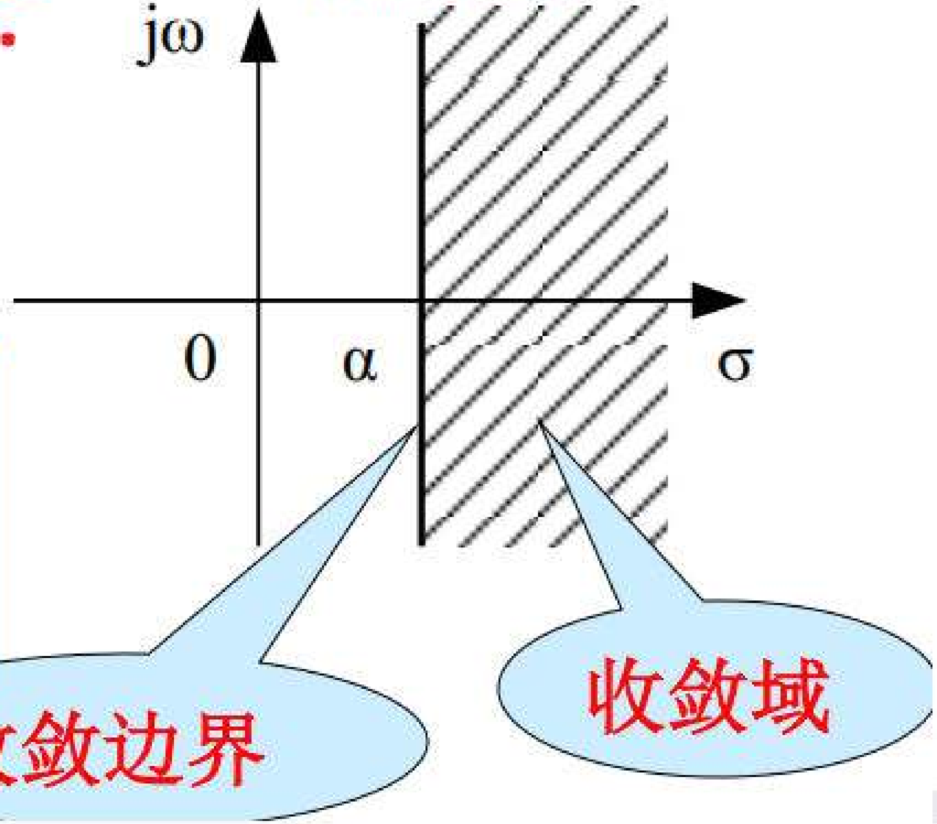
极限存在收敛

解：

$$F_{1b}(s)=\boxed{\int_0^{\infty}} e^{\alpha t}\, e^{-st}\,dt=\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{(s-\alpha)}\boxed{\left[1-\lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t}\, e^{-j\omega t}\right]}$$

满足此条件，收敛
且这部分极限为1

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{s-\alpha}, & \boxed{\mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha}\\ \text{不定}, & \sigma=\alpha\\ \text{无界}, & \sigma<\alpha\end{cases}$$



结论：

可见，对于因果信号，仅当$\mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha$时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。

例2 反因果信号$f_2(t)= e^{\beta t}\boxed{u(-t)}$，求其拉普拉斯变换。

解：

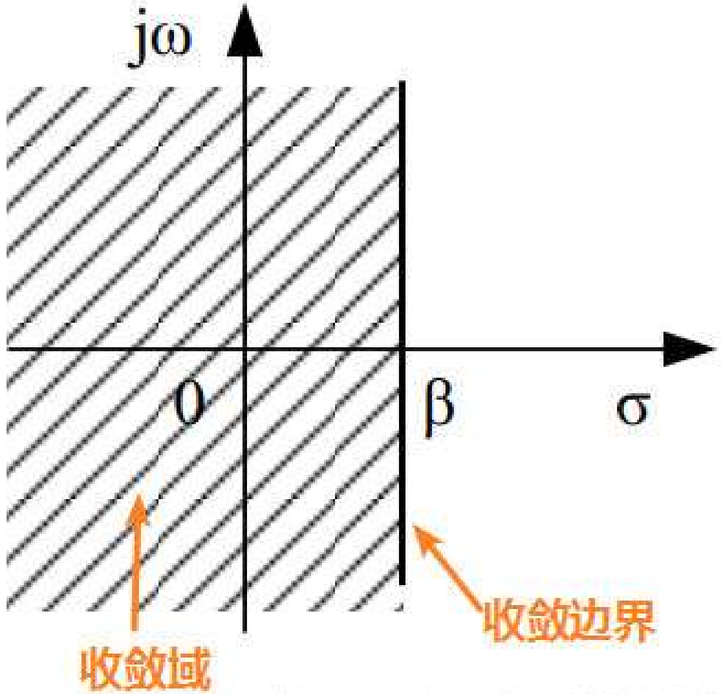
t为自变量，极限存在收敛

$$F_{2b}(s)=\int_{-\infty}^{0}e^{\beta t}e^{-st}\,dt=\left.\frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{-(s-\beta)}\boxed{[1-\lim_{t\to-\infty}e^{-(\sigma-\beta)t}e^{-j\omega t}]}$$

$$=\begin{cases}\text{无界}, & \mathrm{Re}[s]=\sigma>\beta\\ \text{不定}, & \sigma=\beta\\ \boxed{\dfrac{1}{-(s-\beta)}, \quad \sigma<\beta} & \end{cases}$$

结论：

可见，对于反因果信号，仅当$\mathrm{Re}[s]=\sigma<\beta$时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。

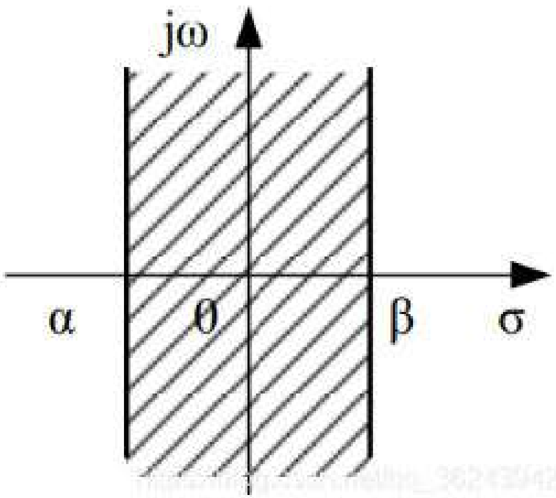


例3 双边信号 $f_3(t)=f_1(t)+f_2(t)=\begin{cases} e^{\beta t}, & t<0 \\ e^{\alpha t}, & t>0 \end{cases}$

求其拉普拉斯变换。

解： 其双边拉普拉斯变换 $F_b(s)=F_{1b}(s)+F_{2b}(s)$

仅当$\beta>\alpha$时，其收敛域为 $\alpha<\mathrm{Re}[s]<\beta$ 的一个带状区域，如图所示。



5.1.2 （单边）拉氏变换的收敛域

如：单个脉冲信号：$\sigma_0 = -\infty$

单位阶跃信号：$\sigma_0=0$

指数函数$e^{\alpha t}$：$\sigma_0 = \alpha$

比指数信号增长的更快的信号：如 e^{t^2} 或 t^t 找不到 σ_0，则此类信号不存在拉氏变换。

凡是增长速度不超过指数函数的函数，统称为指数阶函数。指数阶函数均可以用乘以 $e^{-\sigma t}$ 的方法将其分散性压下去。

结论：凡指数阶函数都有拉氏变换

单边拉氏变换的收敛域是复平面(s 平面)内，$\mathrm{Re}(s) = \sigma > \sigma_0$ 的区域，比较容易确定。一般情况下，不再加注其收敛域。

拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

1. $\sigma_0 > 0$：只有拉氏变换而无傅氏变换

例如增长的指数信号：$e^{\alpha t}u(t) \qquad (\alpha > 0)$

2. $\sigma_0 < 0$：拉氏变换、傅氏变换都存在，且 $F(s) = F(\omega)\big|_{s=j\omega}$

例如衰减的指数信号:$e^{-\alpha t}u(t) \qquad (\alpha < 0)$

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega + \alpha} \qquad F(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

3. $\sigma_0 = 0$：拉氏变换、傅氏变换都存在，但傅氏变换含有冲激函数

例如单位阶跃信号：$u(t)$

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \qquad F(s) = \frac{1}{s}$$

常用信号的拉普拉斯变换	$f(t)$	$F(s)$	σ_0
	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{s+\alpha}$	$-\alpha$
	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$	0
	$\delta(t)$	1	$-\infty$
	$tu(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$	0
	$\sin\omega_0 t u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	0
	$\cos\omega_0 t u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$	0
	$sh\beta t u(t)$	$\dfrac{\beta}{s^2-\beta^2}$	β
	$ch\beta t u(t)$	$\dfrac{s}{s^2-\beta^2}$	β

- 连续信号与系统的复频域分析概述
- 5.1 拉普拉斯变换
- 5.2 拉普拉斯变换的性质
- 5.3 拉普拉斯反变换
- 5.4 连续系统的复频域分析
- 5.5 系统函数
- 5.6 连续系统的模拟
- 本章要点
- 作业

1. 线性

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s) \qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$

则 $af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(s) + bF_2(s) \qquad (a, b$ 为常数)

例： 求单边正弦信号 $\sin\omega_0 t u(t)$ 和单边余弦信号 $\cos\omega_0 t u(t)$ 的拉氏变换。

解：
$$\mathcal{L}[\sin\omega_0 t u(t)] = \mathcal{L}[\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})u(t)]$$

$$= \frac{1}{2j}[\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega_0 t u(t)] = \mathcal{L}[\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})u(t)]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

2. 时移性

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad (t_0>0)$

例： 设$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s^2}$，若$t_0>0$，试求

(1) $f_1(t)=t-t_0$

(2) $f_2(t)=(t-t_0)u(t)$

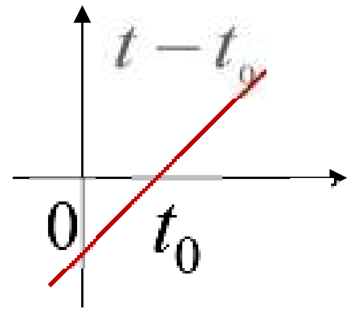
(3) $f_3(t)=tu(t-t_0)$

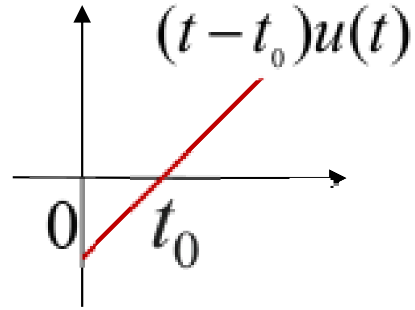
(4) $f_4(t)=(t-t_0)u(t-t_0)$的拉氏变换。

解：信号(1)和(2) $t>0$ 时的波形相同，所以它们的拉氏变换也相同，即

$$\mathcal{L}[t-t_0]=\mathcal{L}[(t-t_0)u(t)]$$

$$=\frac{1}{s^2}-\frac{t_0}{s}=\frac{1-st_0}{s^2}$$

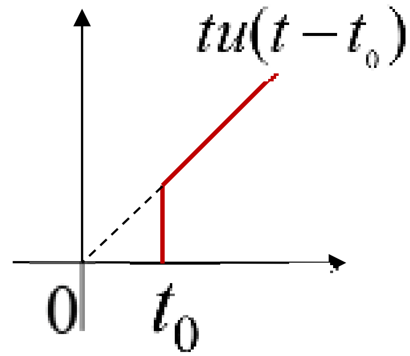




(3) $\mathcal{L}[tu(t-t_0)]$

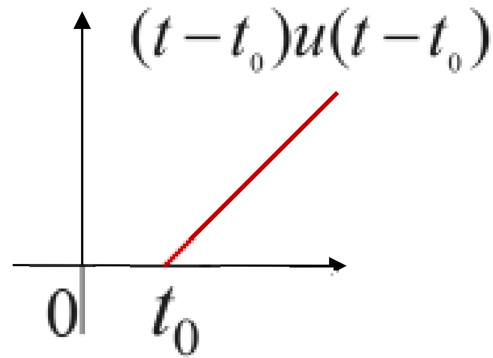
$$=\mathcal{L}[(t-t_0)u(t-t_0)+t_0u(t-t_0)]$$

$$=\frac{1}{s^2}e^{-st_0}+\frac{t_0}{s}e^{-st_0}=\frac{1+st_0}{s^2}e^{-st_0}$$

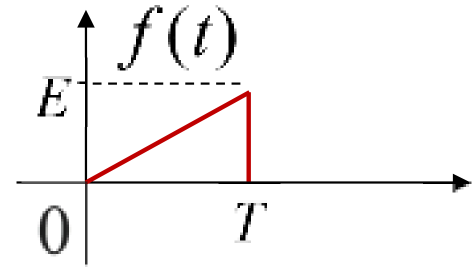


(4) $\mathcal{L}[(t-t_0)u(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$

$$=\frac{1}{s^2}e^{-st_0}$$

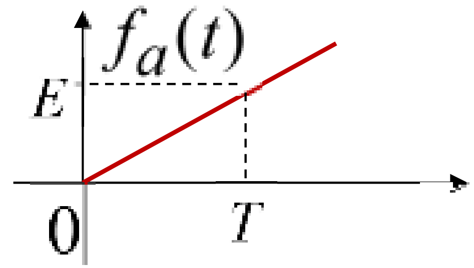


例：求图示锯齿波 $f(t)$ 的拉氏变换



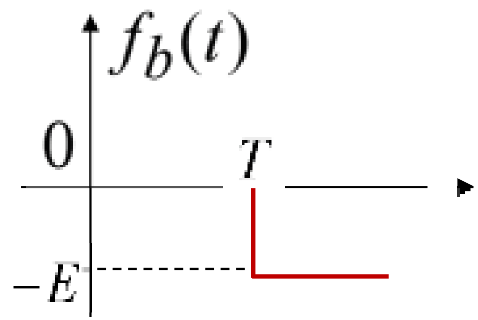
解：$f(t)=\dfrac{E}{T}t[u(t)-u(t-T)]$

$$=\frac{E}{T}tu(t)-\frac{E}{T}(t-T+T)u(t-T)]$$

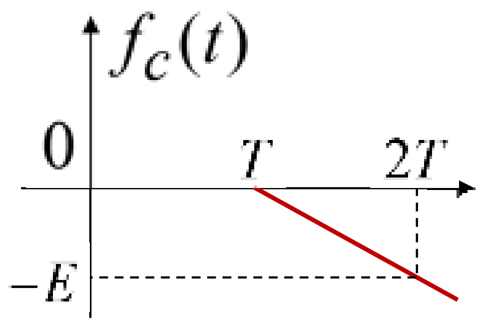


$$=\frac{E}{T}tu(t)-Eu(t-T)-\frac{E}{T}(t-T)u(t-T)$$

$$=f_a(t)+f_b(t)+f_c(t)$$



$f_a(t)\leftrightarrow\dfrac{E}{T}\dfrac{1}{s^2}$　　根据时移性，有



$f_b(t)\leftrightarrow -e^{-sT}\cdot\dfrac{E}{s}$　　$f_c(t)\leftrightarrow -\dfrac{E}{T}\cdot\dfrac{1}{s^2}e^{-sT}$

所以：　$f(t)\leftrightarrow\dfrac{E}{Ts^2}[1-(Ts+1)e^{-sT}]$

利用时移性可以求单边周期信号的拉氏变换

设 $f_1(t)$ 表示第一个周期的函数，则

$$f(t)=f_1(t)+f_1(t-T)u(t-T)+f_1(t-2T)u(t-2T)+\cdots$$

$$F(s)=(1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots)F_1(s)$$

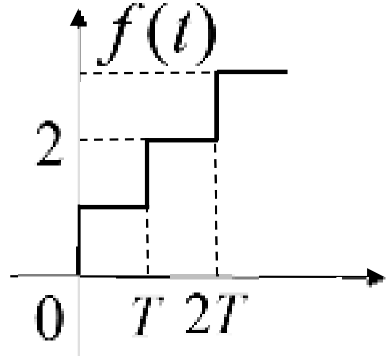
$$=\frac{1}{1-e^{-sT}}F_1(s)\qquad , \quad \left|e^{-st}\right|<1$$

说明周期信号的拉氏变换等于它第一个周期波形的拉氏变换$F_1(s)$ 乘以因子 $\dfrac{1}{1-e^{-sT}}$

周期函数可以是广义的，例如台阶函数

$$f(t)=u(t)+u(t-T)+u(t-2T)+\cdots$$

$$\leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-sT}}$$



例： 求半波正弦函数的拉氏变换

$$解: f_1(t) = f_a(t) + f_b(t) = f_a(t) + f_a(t - \frac{T}{2})$$

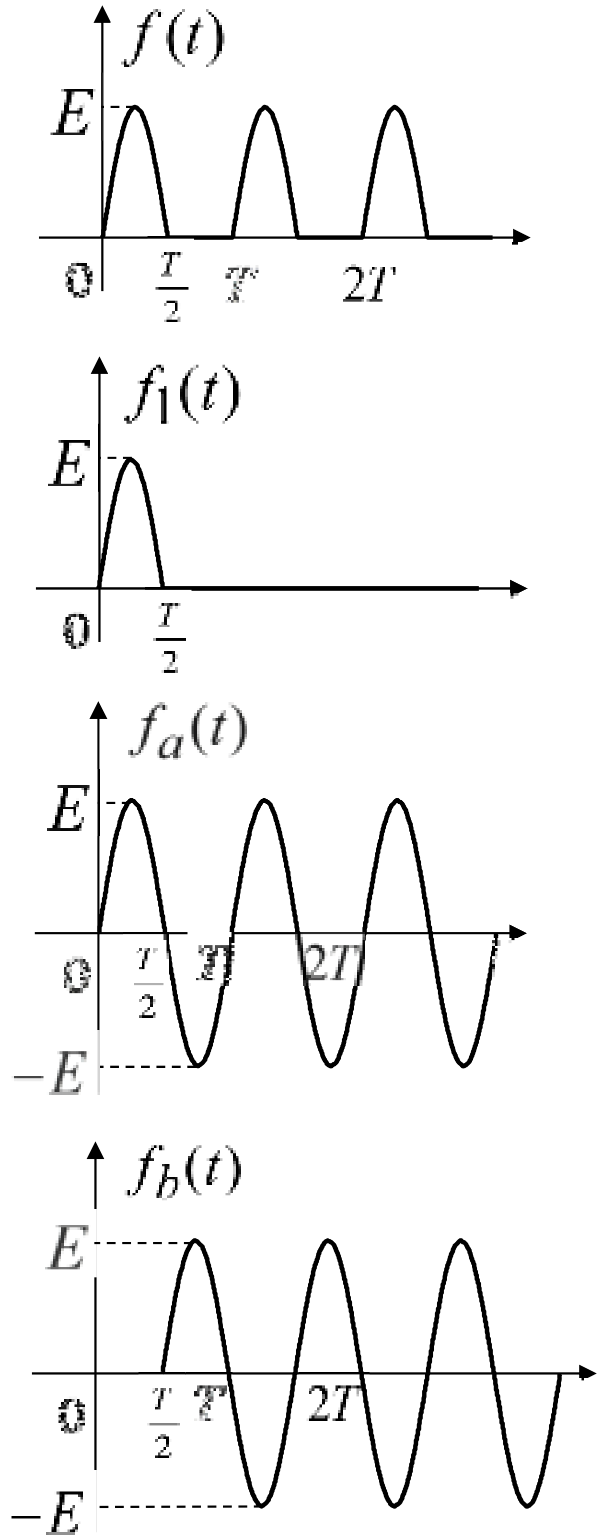
$$= E\sin(\frac{2\pi}{T}t)u(t) + E\sin[\frac{2\pi}{T}(t - \frac{T}{2})u(t - \frac{T}{2})]$$

$$\leftrightarrow \frac{E(2\pi/T)}{s^2 + (2\pi/T)^2} + \frac{E(2\pi/T)}{s^2 + (2\pi/T)^2} e^{-s\cdot\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{E(2\pi/T)}{s^2 + (2\pi/T)^2}(1 + e^{-s\cdot\frac{T}{2}})$$

$$f(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \frac{E(2\pi/T)}{s^2 + (2\pi/T)^2}(1 + e^{-s\cdot\frac{T}{2}})$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-sT/2}} \frac{E(2\pi/T)}{s^2 + (2\pi/T)^2}$$



3. 比例性（尺度变换）

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$ $\quad a > 0$

当既有时移又有尺度变换时：

$$f(at-t_0)u(at-t_0)$$

$$= f[a(t-\frac{t_0}{a})]u[a(t-\frac{t_0}{a})]$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{a} e^{-\frac{s}{a}t_0} F(\frac{s}{a})$$

（先比例，再时移）

$$f(at)u(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$$

4. 频移性

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $f(t)e^{\pm s_0 t} \leftrightarrow F(s \mp s_0)$

这里，s_0 可以是实数，也可以是虚数或复数。

与傅氏变换比较：

$$e^{\pm j\omega_0 t} \cdot f(t) \leftrightarrow F(\omega \mp \omega_0)$$

$$e^{\pm \alpha t} \cdot f(t) \not\leftrightarrow F(\omega \mp \alpha)$$

调制定理：

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(s - j\omega_0) + F(s + j\omega_0)]$$

$$f(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2j}[F(s - j\omega_0) - F(s + j\omega_0)]$$

例4-2-5　求 $e^{-\alpha t}\sin\omega_0 tu(t)$和 $e^{-\alpha t}\cos\omega_0 tu(t)$ 的拉氏变换。

解：因为 $\sin\omega_0 tu(t) \leftrightarrow \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$$\cos\omega_0 tu(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0{}^2}$$

由频移性得：$e^{-\alpha t}\sin\omega_0 tu(t) \leftrightarrow \dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

$$e^{-\alpha t}\cos\omega_0 tu(t) \leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0{}^2}$$

5. 时域微分

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $\mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0^-)$

$$\mathcal{L}[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}] = s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

$$\mathcal{L}[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

主要用于研究具有初始条件的微分方程

证明： 根据定义

$$\mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$= e^{-st} f(t) \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} (-s) e^{-st} f(t) dt$$

$$= sF(s) - f(0^-)$$

同理可得

$$L[\frac{df^2(t)}{dt^2}]=\int_{0^-}^{\infty}\frac{df^2(t)}{dt^2}e^{-st}dt$$

$$=\int_{0^-}^{\infty}\frac{d}{dt}[\frac{df(t)}{dt}]e^{-st}dt$$

$$=s[sF(s)-f(0^-)]-\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0^-}$$

$$=s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$$

依此类推，可得

$$L[\frac{d^nf(t)}{dt^n}]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$$

若 $f(t)$ 为有始函数，即 $f(t)=f(t)u(t)$，则 $L[\frac{df(t)u(t)}{dt}]=sF(s)$

6. 时域积分

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则 $\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda \leftrightarrow \dfrac{F(s)}{s}$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}$$

证明：由定义

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right] = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right]e^{-st}dt$$

$$= [\frac{-e^{-st}}{s}\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\bigg|_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt]$$

$$= \frac{F(s)}{s}$$

若积分下限由 -∞ 开始

$$\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{0^-} f(\lambda)d\lambda + \int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda$$

$$= f^{(-1)}(0^-) + \int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda$$

所以

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda\right] = \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s} + \frac{F(s)}{s}$$

7. 复频域微分和积分

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$

复频域微分： $$tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$$

复频域积分*： $$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} F(s)ds \qquad \lim_{t\to 0} f(t) = 0$$

例4-2-6： 已知$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$，求$tu(t)$的拉氏变换。

解： $$tu(t) \leftrightarrow -\frac{d(\frac{1}{s})}{ds} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

8. 初值定理

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，且 $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$存在，则

$$f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

证明：利用时域微分性质

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

即 $$sF(s) - f(0^-) = \int_{0^-}^{0^+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$= \int_{0^-}^{0^+} \frac{df(t)}{dt} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(0^+) - f(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

故 $$sF(s) = f(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

当$s \to \infty$时，右边积分项消失　　故有 $f(0^+) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

注意：

(1) 当 $F(s)$ 为有理真分式时，可以直接套用公式。

(2) 当 $F(s)$ 不是真分式时，应当先用长除法将 $F(s)$ 化成一个多项式与一个真分式之和，然后对真分式用初值定理。

$$F(s)=F_0(s)+k_m s^m+k_{m-1}s^{m-1}+\cdots+k_0 \leftrightarrow$$

$$f(t)=f_0(t)+k_m\delta^{(m)}(t)+k_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+k_0\delta(t)$$

因为多项式部分所对应的原函数为冲激函数及其导数，它们在 $t=0^+$ 时全为零，不影响 $f(0^+)$ 的值。

例： 已知$F_1(s)=L[f_1(t)]=\dfrac{s+2}{s^2+2s+1}$和

$F_2(s)=L[f_2(t)]=\dfrac{2s+1}{s+3}$，求初值$f_1(0^+)$和$f_2(0^+)$。

解： (1) $F_1(s)$为真分式，则有

$$f_1(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF_1(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2+2s}{s^2+2s+1}=1$$

(2) $F_2(s)$不是真分式，

用长除法将其化为多项式与真分式的和

$$F_2(s)=2+\frac{-5}{s+3}$$

$$f_2(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\frac{-5}{s+3}=-5$$

9. 终值定理

设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，且 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ 存在，则$f(t)$的终值

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

条件：$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$存在

这相当于 $F(s)$ 的极点都在 S 平面的左半平面，并且如果在虚轴上有极点的话，只能在原点处有单极点。

例：已知 $F(s) = \dfrac{5}{s(s^2+3s+2)}$，试求 $f(t)$ 的终值。

解：因为 $F(s)$ 的极点为 $s_1=0$，$s_2=-1$ 和 $s_3=-2$，满足终值定理的条件。所以有

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{5}{s^2+3s+2} = \frac{5}{2}$$

其它性质:

时域卷积定理

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$$

复频域卷积定理

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

(无对称性)

拉普拉斯变换性质的应用：

例　求下列函数的拉氏变换

$1.\ (t-1)u(t)$　　　　$2.\ tu(t-1)$

$3.\ (t+1)u(t+1)$　　　　$4.\ t^2\cos 2t$

解：1.　$(t-1)u(t)=tu(t)-u(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}$

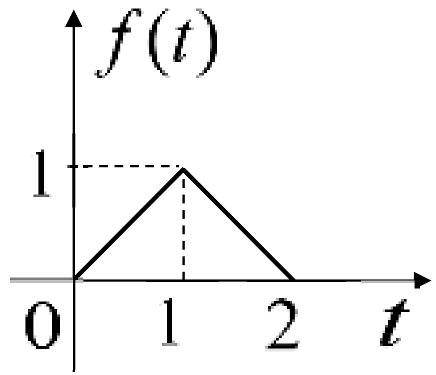
2.　$tu(t-1)=(t-1)u(t-1)+u(t-1)\leftrightarrow (\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s})e^{-s}$

3.　$\mathcal{L}[(t+1)\underline{u(t+1)]}=\mathcal{L}[(t+1)u(t)]=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s}$

4.　$\cos 2t\leftrightarrow \dfrac{s}{s^2+4}$

$$t^2\cos 2t\leftrightarrow(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}(\frac{s}{s^2+4})=\cdots=\frac{2s(s^2-12)}{(s^2+4)^3}$$

例：求图示函数 $f(t)$ 的拉氏变换。

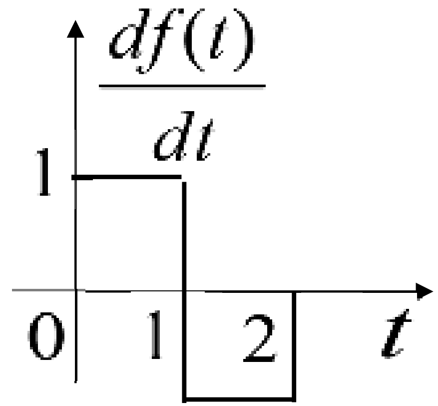


解法一： 利用线性和时移定理

$$f(t)=t[u(t)-u(t-1)]+(-t+2)[u(t-1)-u(t-2)]$$

$$=tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2}e^{-2s}=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$$



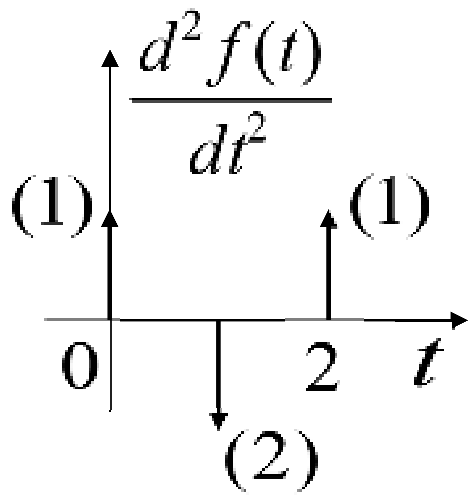
解法二： 利用时域微分性质

$$\frac{df^2(t)}{dt^2}=\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)\leftrightarrow(1-e^{-s})^2$$

而 $f'(0^-)=0, f(0^-)=0,\quad \therefore \frac{df^2(t)}{dt^2}\leftrightarrow s^2F(s)$

故 $s^2F(s)=(1-e^{-s})^2$

$$\therefore\quad F(s)=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$$



例 求下列函数的单边拉氏变换：

(1) $t\dfrac{d\cos t u(t)}{dt}$ (2) $\sin t\, u(t-\pi)$

解：(1) $\cos t u(t) \leftrightarrow \dfrac{s}{s^2+1}$

$$\frac{d\cos t u(t)}{dt} \leftrightarrow \frac{s^2}{s^2+1}$$

$$\therefore t\frac{d\cos t u(t)}{dt} \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) = -\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

(2) $\sin tu(t-\pi) = -\sin(t-\pi)u(t-\pi)$

$$\sin tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2+1}$$

$$-\sin(t-\pi)u(t-\pi) \leftrightarrow -\frac{1}{s^2+1}e^{-s\pi}$$

- 连续信号与系统的复频域分析概述
- 5.1 拉普拉斯变换
- 5.2 拉普拉斯变换的性质
- 5.3 拉普拉斯反变换
- 5.4 连续系统的复频域分析
- 5.5 系统函数
- 5.6 连续系统的模拟
- 本章要点
- 作业

5.3 拉普拉斯反变换

- 简单的拉普拉斯反变换：直接应用典型信号的拉氏变换对（附录3）及拉氏变换的性质（附录4）得到

- $F(s)$为多项式之比：部分分式展开法（针对真分式）

常见的拉氏变换式是 s 的多项式之比，一般形式为

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

如果 $N(s)$ 的阶次高于或等于$D(s)$ 的阶次, 可以用长除法将 $F(s)$ 化成多项式与真分式之和：

· 多项式部分的拉氏反变换是冲激函数及其导数，可以直接求得。

· 真分式部分用部分分式展开法求。

★ 部分分式展开法（分三种情况）

当$D(s)=0$的根都是单实根时：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$$

其中 $$k_i=(s-p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=p_i}\quad(i=1,2,\cdots n)$$

遮挡法

此时，$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{k_1}{s-p_1}]+\mathcal{L}^{-1}[\frac{k_2}{s-p_2}]+\cdots+\mathcal{L}^{-1}[\frac{k_n}{s-p_n}]$

$$=[k_1e^{p_1t}+k_2e^{p_2t}+\cdots+k_ne^{p_nt}]u(t)$$

例： 求$F(s)=\dfrac{s^4+2s^3-2}{s^3+2s^2-s-2}$的拉氏反变换。

解：$F(s)$是假分式，先将其化为真分式与多项式的和

$$F(s)=s+\frac{s^2+2s-2}{s^3+2s^2-s-2}=s+\frac{s^2+2s-2}{(s+1)(s+2)(s-1)}$$

$$=s+\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s-1}$$

$$k_1=(s+1)\frac{s^2+2s-2}{(s+1)(s+2)(s-1)}\bigg|_{s=-1}=\frac{s^2+2s-2}{(s+2)(s-1)}\bigg|_{s=-1}=\frac{3}{2}$$

$\boxed{\text{遮挡法}}$

$$k_2=(s+2)\frac{s^2+2s-2}{(s+1)(s+2)(s-1)}\bigg|_{s=-2}=\frac{s^2+2s-2}{(s+1)(s-1)}\bigg|_{s=-2}=\frac{-2}{3}$$

$$k_3=(s-1)\frac{s^2+2s-2}{(s+1)(s+2)(s-1)}\bigg|_{s=1}=\frac{s^2+2s-2}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=1}=\frac{1}{6}$$

$$F(s)=s+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s-1}\leftrightarrow\delta'(t)+\left(\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{t}\right)u(t)$$

2. $D(s)=0$的根有共轭单复根

$$D(s)=(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-2})(s^2+bs+c)$$

$$=D_1(s)(s^2+bs+c)$$

二次多项式中，若$b^2<4c$，则构成一对共轭复根。

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{As+B}{s^2+bs+c}+\frac{N_1(s)}{D_1(s)}=\frac{As+B}{(s+a)^2+\omega_0}+\frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

上式右边第二项仍用前述方法展开为部分分式，再利用对应项系数相等的方法即可求得 A 和 B。

反变换可以用配方法:

$$\frac{As+B}{(s+a)^2+\omega_0^{\ 2}}=\frac{A(s+a)+\dfrac{B-Aa}{\omega_0}\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^{\ 2}}$$

$$\leftrightarrow Ae^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)+\frac{B-Aa}{\omega_0}e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$$

例： 试求$F(s)=\dfrac{s+5}{s\left(s^2+2s+5\right)}$的拉氏反变换。

解：$F(s)=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{As+B}{s^2+2s+5}$ $\qquad k_1=s\cdot F(s)\big|_{s=0}=1$ 遮挡法

$$\therefore\quad F(s)=\frac{1}{s}+\frac{As+B}{s^2+2s+5}$$

令$s=1$代入上式，得$\dfrac{3}{4}=1+\dfrac{A+B}{8}$

两边乘以s，令$s\to\infty$，得 $0=1+A$ $\qquad \therefore\ \begin{cases}A=-1\\B=-1\end{cases}$

对应项系数相等法

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{-s-1}{s^2+2s+5}=\frac{1}{s}+\frac{-(s+1)}{(s+1)^2+2^2}$$

配方法

$$\therefore f(t)=\left(1-e^{-t}\cos 2t\right)u(t)$$

3. $D(s)=0$的根有重根

若 $D(s)=0$ 只有一个 r 重根 p_1，则 $D(s)$ 可写成

$$D(s)=(s-p_1)^r(s-p_{p-1})\cdots(s-p_n)$$

$$F(s)=\frac{k_1}{(s-p_1)^r}+\frac{k_2}{(s-p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{k_{r-1}}{(s-p_1)^2}+\frac{k_r}{(s-p_1)}+\frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

其中，k_1由公式求得： $k_1=(s-p_1)^r F(s)\big|_{s=p_1}$

遮挡法

其余系数$k_2 \dots k_r$可以通过对应项系数相等法得到。

它们的拉氏反变换可通过频域微分性质得到

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_{r-i+1}}{(s-p_1)^i}\right]=\frac{k_{r-i+1}}{(i-1)!}t^{i-1}e^{p_1 t}$$

例：求 $F(s)=\dfrac{2s^2+3s+1}{s^3+2s^2}$ 的原函数

解：$F(s)=\dfrac{2s^2+3s+1}{s^3+2s^2}=\dfrac{k_{11}}{s^2}+\dfrac{k_{12}}{s}+\dfrac{k_2}{s+2}$

用遮挡法，得

$$k_{11}=s^2F(s)\Big|_{s=0}=\frac{1}{2},\quad k_2=(s+2)F(s)\Big|_{s=-2}=\frac{3}{4}$$

令 $s=1$ 代入上式，得

$$\frac{6}{3}=\frac{1}{2}+k_{12}+\frac{1}{4},\quad \therefore k_{12}=\frac{5}{4}$$

对应项系数相等法

$$\therefore F(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s^2}+\frac{\frac{5}{4}}{s}+\frac{\frac{3}{4}}{s+2}\leftrightarrow\left(\frac{1}{2}t+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}e^{-2t}\right)u(t)$$

求拉普拉斯反变换的综合实例:

例: 求下列函数的拉氏反变换:

$$(1)\ F(s)=\frac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$$

解:
$$\frac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}=\frac{1}{s(s^2+4)}-\frac{1}{s(s^2+4)}e^{-2s}$$

$$\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}$$

$$A=s\cdot\frac{1}{s(s^2+4)}\bigg|_{s=0}=\frac{1}{4}$$

遮挡法

两边乘以s, 并令$s\to\infty$, 则$0=\frac{1}{4}+B\Rightarrow B=-\frac{1}{4}$

令$s=1$, 则$\frac{1}{5}=\frac{1}{4}+\frac{B+C}{5}\Rightarrow B+C=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow C=0$

对应项系数相等法

即

$$\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{\frac{1}{4}}{s}+\frac{-\frac{1}{4}s+0}{s^2+4} \quad \leftrightarrow \frac{1}{4}(1-\cos 2t)u(t)$$

根据时移性质，有

$$\frac{1}{s(s^2+4)}e^{-2s}\leftrightarrow\frac{1}{4}[1-\cos 2(t-2)]u(t-2)$$

$$\therefore \quad F(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}-\frac{1}{s(s^2+4)}e^{-2s}$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{4}(1-\cos 2t)u(t)-\frac{1}{4}[1-\cos 2(t-2)]u(t-2)$$

$$(2)\ F(s)=\frac{s^3}{s^2+s+1}$$

解：

$$F(s)=s-1+\frac{1}{s^2+s+1}=s-1+\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

（长除法）

（配方法）

$$\therefore F(s)\leftrightarrow\delta'(t)-\delta(t)+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}tu(t)$$

例: 求下列函数的拉氏反变换:

$$(1)\ \frac{e^{-2(s+2)}}{s+2} \qquad (2)\ \frac{(1+e^{-s})(1-e^{-3s})}{s}$$

解: $(1)\ \frac{1}{s} \leftrightarrow u(t) \quad \frac{1}{s}e^{-2s} \leftrightarrow u(t-2) \qquad \therefore \frac{e^{-2(s+2)}}{s+2} \leftrightarrow u(t-2)e^{-2t}$

$$(2)\ \frac{(1+e^{-s})(1-e^{-3s})}{s} = \frac{1}{s}\left(1+e^{-s}-e^{-3s}-e^{-4s}\right)$$

$$\leftrightarrow u(t)+u(t-1)-u(t-3)-u(t-4)$$

或 $\frac{1+e^{-s}}{s} \leftrightarrow u(t)+u(t-1),\quad 1-e^{-3s} \leftrightarrow \delta(t)-\delta(t-3)$

原式 $\leftrightarrow [u(t)+u(t-1)]*[\delta(t)-\delta(t-3)]$

$$=u(t)+u(t-1)-u(t-3)-u(t-4)$$

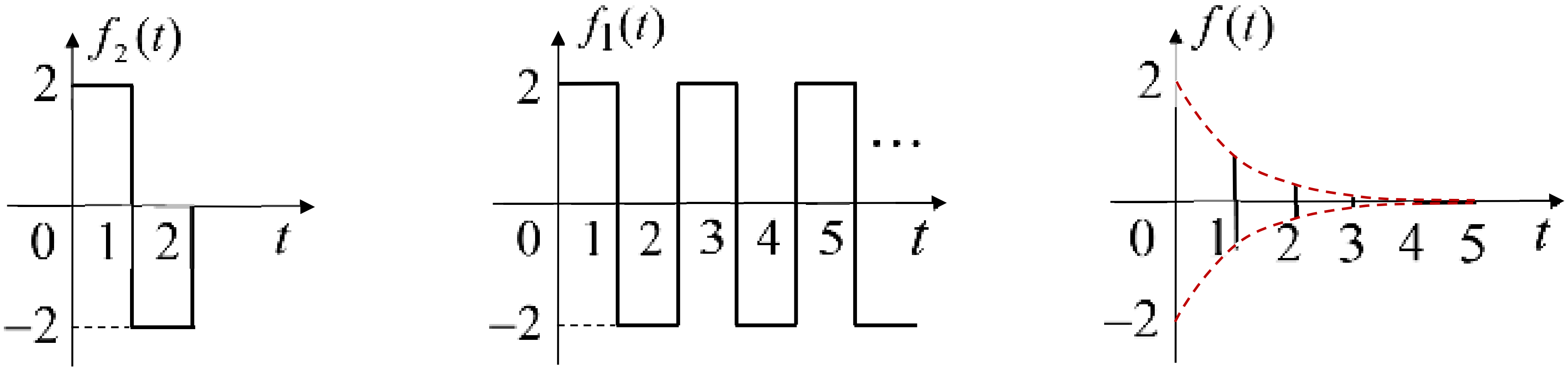
例：求 $F(s)=\dfrac{2[1-e^{-(s+1)}]^2}{(s+1)[1-e^{-2(s+1)}]}$ 的原函数

解：根据 $F(s)$ 的特点，设 $F_1(s)=F(s-1)$，则

$$F_1(s)=\frac{2(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-2s})}=2\cdot\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-2s}}=F_2(s)\cdot\frac{1}{1-e^{-2s}}$$

其中 $F_2(s)=\dfrac{2}{s}(1-2e^{-s}+e^{-2s})$

$$\leftrightarrow f_2(t)=2u(t)-4u(t-1)+2u(t-2)$$



$f_1(t)$ 是周期为2的有始方波，根据频移特性可知 $f(t)=e^{-t}f_1(t)$。

第五章 连续时间系统的复频域分析

- 连续信号与系统的复频域分析概述
- 5.1 拉普拉斯变换
- 5.2 拉普拉斯变换的性质
- 5.3 拉普拉斯反变换
- 5.4 连续系统的复频域分析
- 5.5 系统函数
- 5.6 连续系统的模拟
- 本章要点
- 作业

5.4.1 求解系统微分方程

5.4.2 分析电路

5.4.1 求解系统微分方程

以二阶常系数线性微分方程为例：

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

设激励$x(t)$为有始信号，即

$$x(0^-) = 0, x'(0^-) = x''(0^-) = \cdots = x^{(n-1)}(0^-) = 0$$

对微分方程两边取拉氏变换，利用时域微分性质，有

$$a_2[s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + a_1[sY(s) - y(0^-)] + a_0 Y(s) = b_1 sX(s) + b_0 X(s)$$

整理成

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_1 s + b_0)X(s) + a_2 sy(0^-) + a_2 y'(0^-) + a_1 y(0^-)$$

$$\therefore Y(s) = \boxed{\frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} X(s)} + \boxed{\frac{a_2 s y(0^-) + a_2 y'(0^-) + a_1 y(0^-)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}$$

$$= Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s)$$

记 $Y_{zs}(s) = H(s)X(s)$，则

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$ 称为系统函数

对 $Y(s)$ 进行反变换，可得全响应的时域表达式：

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_{zs}(s)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[Y_{zi}(s)\right]$$

$$= y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

例： 系统的微分方程为

$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x'(t)+x(t)$，激励$x(t)=e^{-t}u(t)$，

初始状态$y(0^-)=2$，$y'(0^-)=1$，求全响应$y(t)$。

解： 对微分方程取拉氏变换，得

$$[s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)]+5[sY(s)-y(0^-)]+6Y(s)=sX(s)+X(s)$$

$$\therefore Y(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}X(s)+\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+5y(0^-)}{s^2+5s+6}$$

$$x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\therefore Y(s)=\frac{2s+12}{s^2+5s+6}=\frac{8}{s+2}+\frac{-6}{s+3}$$

$$\leftrightarrow y(t)=8e^{-2t}-6e^{-3t},\quad t\geq 0$$

如果题目还要求分别求出$Y_{zs}(s)$和$Y_{zi}(s)$：

$$Y_{zs}(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}X(s)$$

$$=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

$$y_{zs}(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})\underline{u(t)}$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+5y(0^-)}{s^2+5s+6}=\frac{2s+11}{(s+2)(s+3)}=\frac{7}{s+2}-\frac{5}{s+3}$$

$$y_{zi}(t)=7e^{-2t}-5e^{-3t}\quad \underline{(t\geq 0)}$$

此处不能加注$u(t)$

$$\therefore y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=8e^{-2t}-6e^{-3t}\quad \underline{(t\geq 0)}$$

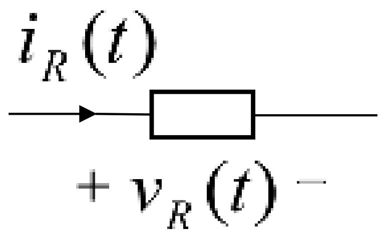
5.4.2 分析电路

已知电路时，可根据复频域电路模型，直接列写求解复频域响应的代数方程。

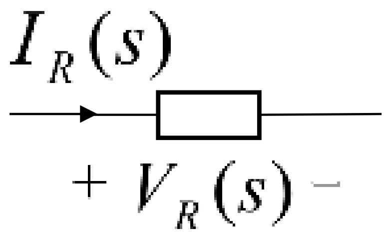
电路元件的复频域模型：

1. 电阻元件

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

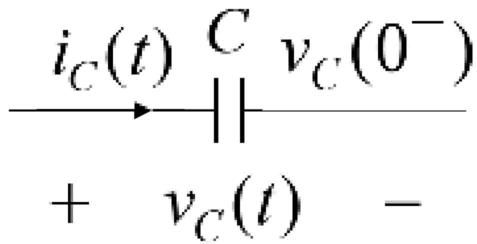


$$V_R(s) = RI_R(s)$$

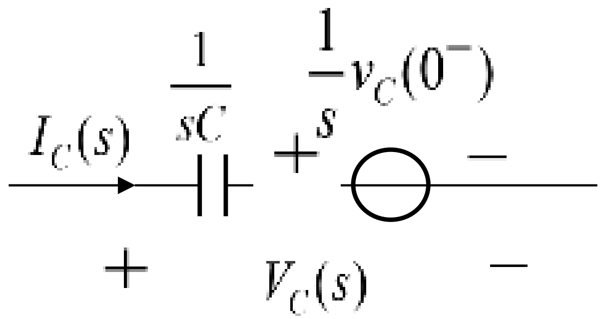


2. 电容元件

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_C(\tau)d\tau+v_C(0^-)$$

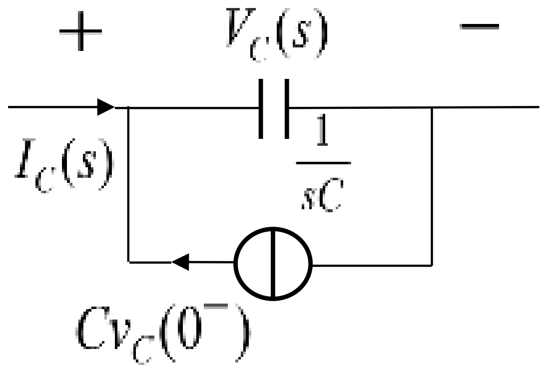


$$V_C(s)=\frac{1}{sC}I_C(s)+\frac{1}{s}v_C(0^-)$$



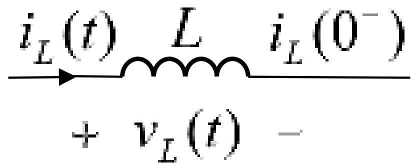
或

$$I_C(s)=sCV_C(s)-Cv_C(0^-)$$

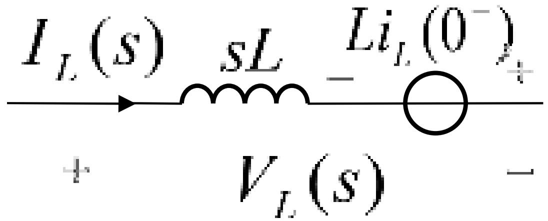


5.4.2 分析电路

3. 电感元件

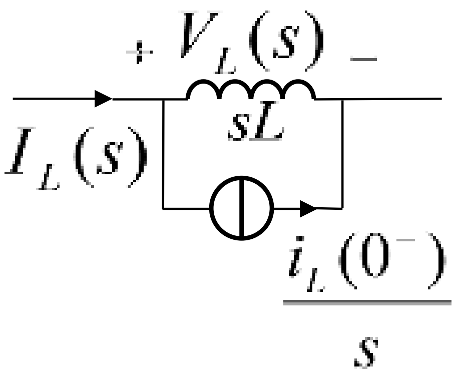


$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$$



$$V_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0^-)$$

或 $$I_L(s)=\frac{1}{sL}V_L(s)+\frac{i_L(0^-)}{s}$$



注意：

（1）内电源的方向；

（2）串联模型中，元件上的电压为复频阻抗上的电压与内电压源的电压之和。

5.4.2 分析电路

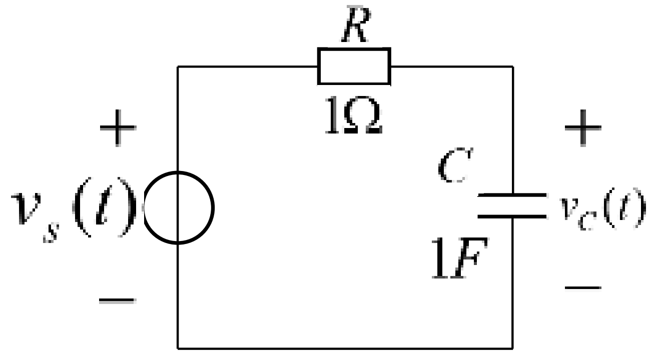
基尔霍夫电流定律(KCL)： $\sum_k i_k(t)=0 \quad \leftrightarrow \quad \sum_k I_k(s)=0$

基尔霍夫电压定律(KVL)： $\sum_k v_k(t)=0 \quad \leftrightarrow \quad \sum_k V_k(s)=0$

用电路的复频域模型求解响应的步骤：

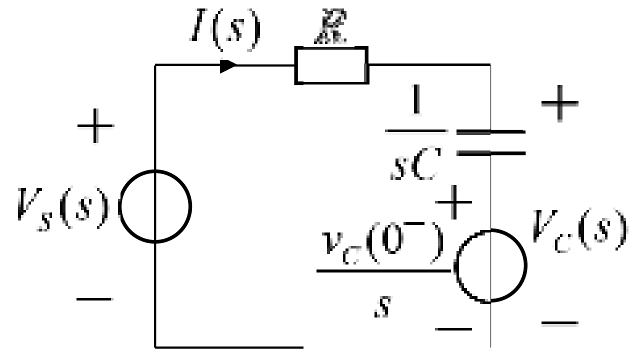
1. 电路中的每个元件都用其复频域模型代替（初始状态转换为相应的内电源）；
2. 信号源及各变量用其拉氏变换式代替；
3. 画出电路的复频域模型；
4. 应用电路分析的各种方法和定理求解响应的变换式。
5. 反变换得响应的时域表达式。

例： 已知$v_s(t)=(1+e^{-3t})u(t),v_C(0^-)=1V$
求响应电压$v_C(t)$



解： 画出复频域模型如图所示，其中

$$V_s(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+3}$$



由**KVL**得 $V_s(s)=I(s)R+\dfrac{1}{sC}I(s)+\dfrac{v_C(0^-)}{s}$

$$\therefore\quad I(s)=\frac{V_s(s)-\dfrac{v_C(0^-)}{s}}{R+\dfrac{1}{sC}}$$

$$V_C(s)=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{v_C(0^-)}{s}=\frac{V_s(s)-\dfrac{v_C(0^-)}{s}}{RsC+1}+\frac{v_C(0^-)}{s}$$

$$=\frac{V_s(s)}{RsC+1}+\frac{RCv_C(0^-)}{RsC+1}$$

零状态响应：

$$V_{Czs}(s)=\frac{V_s(s)}{RsC+1}=\frac{\frac{1}{s}+\frac{1}{s+3}}{s+1}=\frac{2s+3}{s(s+1)(s+3)}=\frac{1}{s}-\frac{\frac{1}{2}}{s+1}-\frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

$$\therefore v_{Czs}(t)=\mathcal{L}^{-1}[V_{Czs}(s)]=(1-\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t})u(t)$$

零输入响应：

$$V_{Czi}(s)=\frac{RC\,v_C(0^-)}{RsC+1}=\frac{1}{s+1}$$

$$\therefore v_{Czi}(t)=\mathcal{L}^{-1}[V_{Czi}(s)]=e^{-t}\,(t\geq 0)$$

全响应：

$$v_C(t)=v_{Czs}(t)+v_{Czi}(t)=1-\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\,(t\geq 0)$$

第五章 连续时间系统的复频域分析

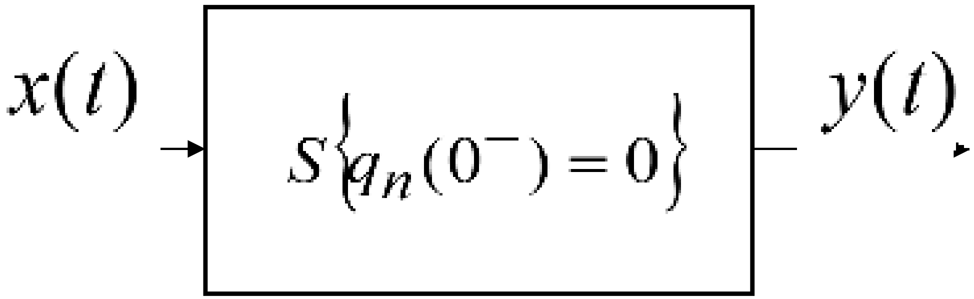
- 连续信号与系统的复频域分析概述
- 5.1 拉普拉斯变换
- 5.2 拉普拉斯变换的性质
- 5.3 拉普拉斯反变换
- 5.4 连续系统的复频域分析
- 5.5 系统函数
- 5.6 连续系统的
- 本章要点
- 作业

5.5.1 系统函数
5.5.2 系统函数的零、极点图
5.5.3 系统函数的零、极点图分布与系统冲激响应的关系
5.5.4 系统的稳定性

5.5.1 系统函数

1. 系统函数与零状态响应

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$



当激励为 $\delta(t)$ 时，零状态响应为 $h(t)$，故

$$\mathcal{L}[h(t)]=H(s)\mathcal{L}[\delta(t)]=H(s)$$

时域	$x(t)*h(t)=y(t)$
频域	$X(\omega)\cdot H(\omega)=Y(\omega)$
复频域	$X(s)\cdot H(s)=Y(s)$

5.5.1 系统函数

当激励为无时限的复指数信号 $e^{st}(-\infty < t < +\infty)$ 时，

$$y_{zs}(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{s(t-\lambda)} d\lambda = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda$$

$$= e^{st} \int_{0^-}^{\infty} h(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda = e^{st} H(s)$$

表明此时因果系统的零状态响应仍为相同复频率的指数信号，但被加权了 $H(s)$。

条件：复频率 s 位于 $H(s)$ 的收敛域内，即位于 $H(s)$ 最右边的极点的右边。

复频域分析法求解系统零状态响应的实质：

将激励信号分解为无穷多不同复频率的复指数分量之和，

即 $$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds=\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}\left[\frac{X(s)ds}{2\pi j}e^{st}\right]$$

对于 $x(t)$ 中的每一个分量 $\frac{X(s)ds}{2\pi j}e^{st}$，相应的响应分量为

$$\frac{X(s)ds}{2\pi j}e^{st}H(s)$$

把无穷多个响应分量叠加起来，便得到了总响应

$$y(t)=\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\left\{\left[\frac{X(s)ds}{2\pi j}e^{st}\right]H(s)\right\}=\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\left[\frac{Y(s)ds}{2\pi j}\right]e^{st}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}Y(s)e^{st}ds=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]$$

2. 系统函数的求法

（1）已知微分方程：零状态条件下对方程两边做拉氏变换

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t)$$

$$= b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

（2）已知冲激响应：对冲激响应求拉氏变换

$$H(s) = \mathcal{L}\left[h(t)\right]$$

（3）已知电路：利用电路的复频域模型求解

例：已知系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2x'(t)+3x(t)$

试求该系统的系统函数。

解法一：

在零状态条件下，对微分方程两边取拉氏变换，得

$$s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s)=2sX(s)+3X(s)$$

所以 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{2s+3}{s^2+3s+2}$

解法二：先求得冲激响应为

$$h(t)=(e^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

$$H(s)=\mathcal{L}\left[h(t)\right]=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}=\frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

5.5.2 系统函数的零、极点图

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=H_0\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)}$$

其中 $H_0=\dfrac{b_m}{a_n}$ 为常数

z_j 称为系统函数的零点

p_k 称为系统函数的极点

系统函数的零、极点图：（是系统函数的另一种表示方法）

零点用“○”表示

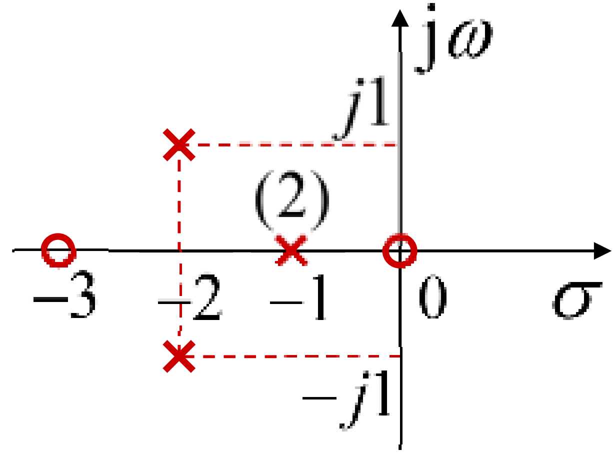
极点用“×”表示

若为 n 重零点或极点，则注以 (n)

实际系统的系统函数必定是复变量 s 的实有理函数，其零、极点一定是实数或成对出现的共轭复数。

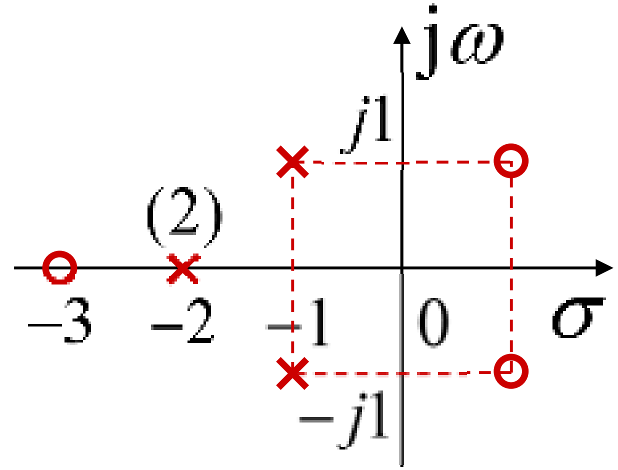
例：系统函数为

$$H(s)=\frac{s(s+3)}{(s+1)^2[(s+2)^2+1]}=\frac{s(s+3)}{(s+1)^2(s+2+j)(s+2-j)}$$



则其零极点图如右图所示。

例：已知系统的零、极点图，并且该系统阶跃响应的终值为 3，试写出系统函数的表达式。



解：$$H(s)=H_0\frac{(s+3)(s-1+j)(s-1-j)}{(s+2)^2(s+1+j)(s+1-j)}$$

依题意知

$$\lim_{s\to0}s\left[H(s)\cdot\frac{1}{s}\right]=\lim_{s\to0}H_0\frac{(s+3)(s-1+j)(s-1-j)}{(s+2)^2(s+1+j)(s+1-j)}=\frac{3}{4}H_0=3$$

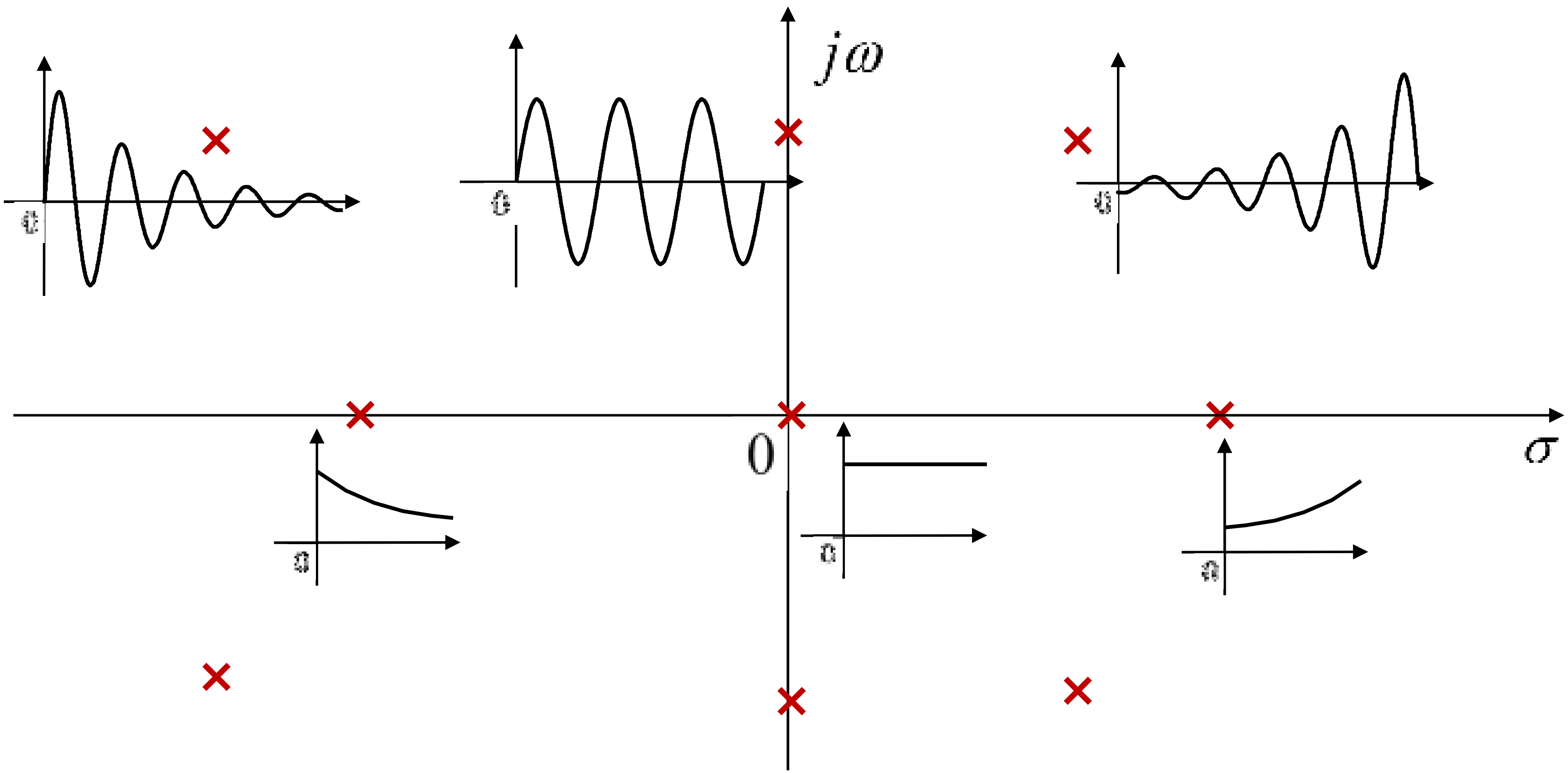
$$\therefore\quad H(s)=4\cdot\frac{(s+3)[(s-1)^2+1]}{(s+2)^2[(s+1)^2+1]}=\cdots$$

5.5.3 由系统函数的零、极点分布与系统的冲激响应的关系

系统函数和系统的冲激响应是一对拉氏变换，因此只要已知系统函数的零极点分布就可确定系统冲激响应的变化规律。

(a). *H* (*s*) 的所有极点都为单极点：

根据极点的位置分成三种情况，如下图所示



（b）若$H(s)$具有n重极点，则冲激响应的模式中将含有t^{n-1}因子。

例如：$H(s)=\dfrac{1}{s^2}\leftrightarrow h(t)=tu(t)$

$$H(s)=\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}\leftrightarrow h(t)=t\sin\omega_0 tu(t)$$

（c）$H(s)$零点分布的情况只影响冲激响应的幅度和相位，而对冲激响应的模式没有影响。

例如：$H(s)=\dfrac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\leftrightarrow h(t)=e^{-3t}\cos 2tu(t)$

$$H(s)=\frac{s+1}{(s+3)^2+2^2}\leftrightarrow h(t)=e^{-3t}(\cos 2t-\sin 2t)u(t)$$

$$=\sqrt{2}e^{-3t}\cos(2t+45^\circ)u(t)$$

（d）当$H(s)$为假分式时，应先化成多项式与真分式之和。多项式部分表示冲激响应中含有冲激函数及其各阶导数，再分析真分式部分所对应的响应模式。

5.5.4 连续系统的稳定性

已知系统函数的极点，可以判别系统的稳定性。

1. 稳定系统的定义：

对有界的激励产生有界的零状态响应的系统

设连续时间系统的输入信号 $x(t)$ 有界，即 $|x(t)| \le M_x$，

则 $|y(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot |x(t-\tau)| d\tau \le M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$

欲使 $y(t)$ 为有界输出，即 $|y(t)| < \infty$，则系统的冲激响应 $h(t)$ 必须满足绝对可积的条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

线性时不变因果系统稳定的充要条件：$\int_{0}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

（时域）

2. 系统稳定性的判别（复频域）

（1）稳定系统：$H(s)$的所有极点均位于s左半平面。

（2）临界稳定系统：$H(s)$在虚轴上（包括原点）有一阶极点，其余的所有极点均位于s左半平面。

（3）不稳定系统：$H(s)$有位于s右半平面的极点，或在虚轴上（包括原点）有二阶以上的极点。

一般地，稳定系统其分母多项式$D(s)$各项系数均为正实常数，且多项式中无缺项。

对于二阶系统，若$D(s)$各项系数均为正实常数，则系统稳定。

例:已知系统函数 $H(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s-1)(s^2+5s-2)}$,试判别该系统的稳定性。

解法一:

特征根(极点)为 $s_1=1$，$s_2=\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}$，$s_3=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}$

s_1 和 s_3 位于 s 右半平面，所以系统不稳定。

解法二:

系统函数的分母多项式 $D(s)=(s-1)(s^2+5s-2)=s^3+4s^2-7s+2$

其中有一项系数为负，所以系统不稳定。

例4-5-4 已知系统函数 $H(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+(3-k)}$

求系统稳定时k的范围。

解：系统是二阶系统，则当3－ $K<0$，即$K<3$ 时系统是稳定的。

第五章 连续时间系统的复频域分析

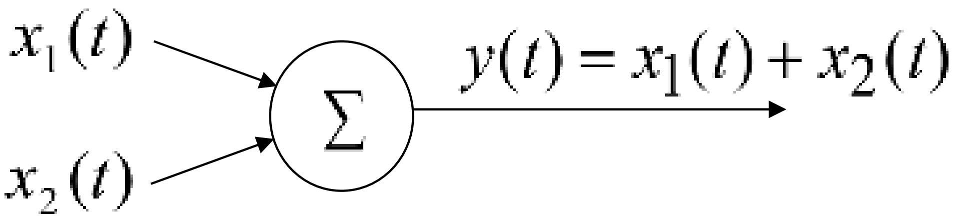
- 连续信号与系统的复频域分析概述
- 5.1 拉普拉斯变换
- 5.2 拉普拉斯变换的性质
- 5.3 拉普拉斯反变换
- 5.4 连续系统的复频域分析
- 5.5 系统函数
- 5.6 连续系统的模拟
- 本章要点
- 作业

5.6.1 基本运算器

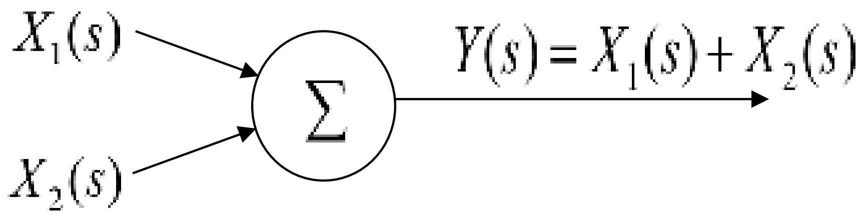
5.6.2 连续系统的模拟

5.6.1 基本运算器

1. 加法器



（时域）



（复频域）

2. 标量乘法器

$$x(t) \longrightarrow \boxed{a} \longrightarrow y(t)=a\cdot x(t)$$ （时域）

$$X(s) \longrightarrow \boxed{a} \longrightarrow Y(s)=a\cdot X(s)$$ （复频域）

3. 积分器

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y(t)=\int_{t_0}^{t} x(\lambda)d\lambda$$ （时域）

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \longrightarrow Y(s)=\frac{1}{s}X(s)$$ （复频域）

5.6.2 连续系统的模拟图

1. 一阶系统的模拟

时域

一阶系统的数学模型为：

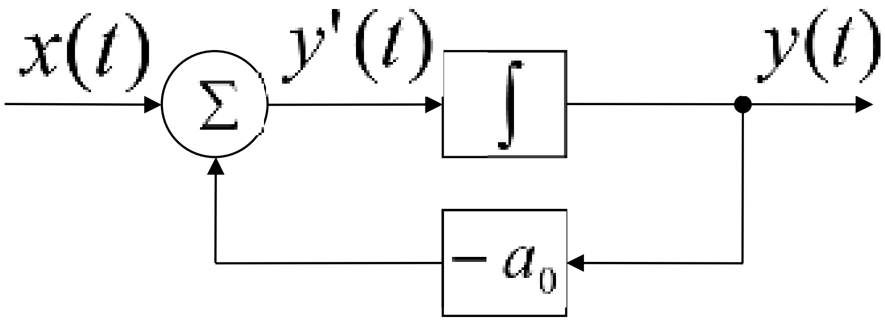
$$y'(t)+a_0y(t)=x(t)$$

拉氏变换
（零状态）

改写为：

$$y'(t)=x(t)-a_0y(t)$$

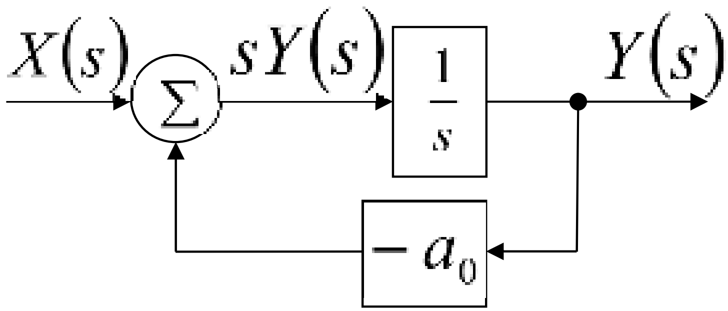
画系统模拟图：



复频域

$$sY(s)+a_0Y(s)=X(s)$$

$$sY(s)=X(s)-a_0Y(s)$$



2. 二阶系统的模拟

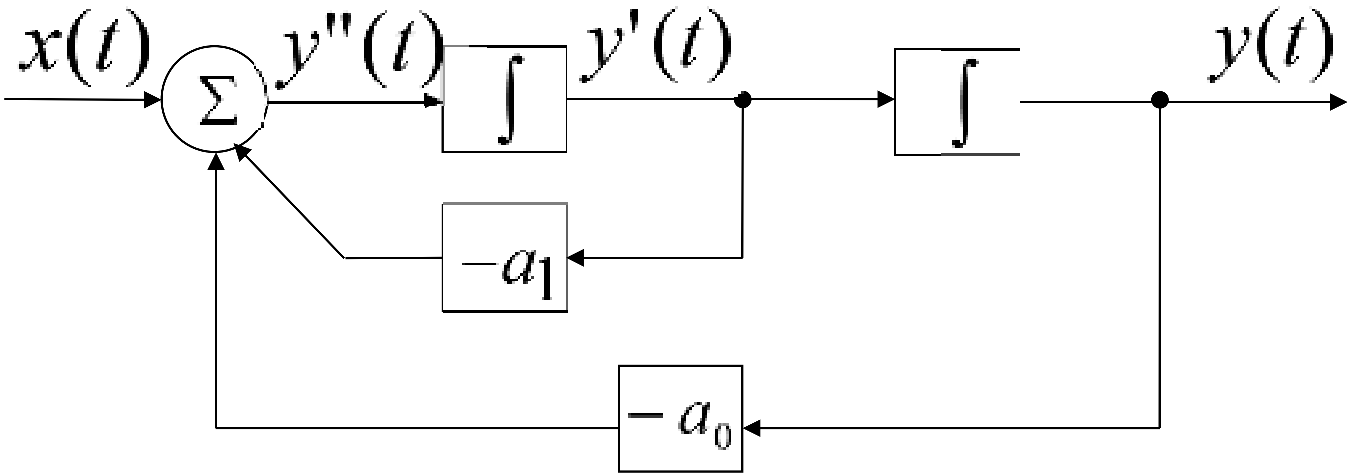
二阶系统的数学模型为：

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=x(t)$$

改写为：

$$y''(t)=x(t)-a_1y'(t)-a_0y(t)$$

画系统模拟图：



3. n阶系统的模拟

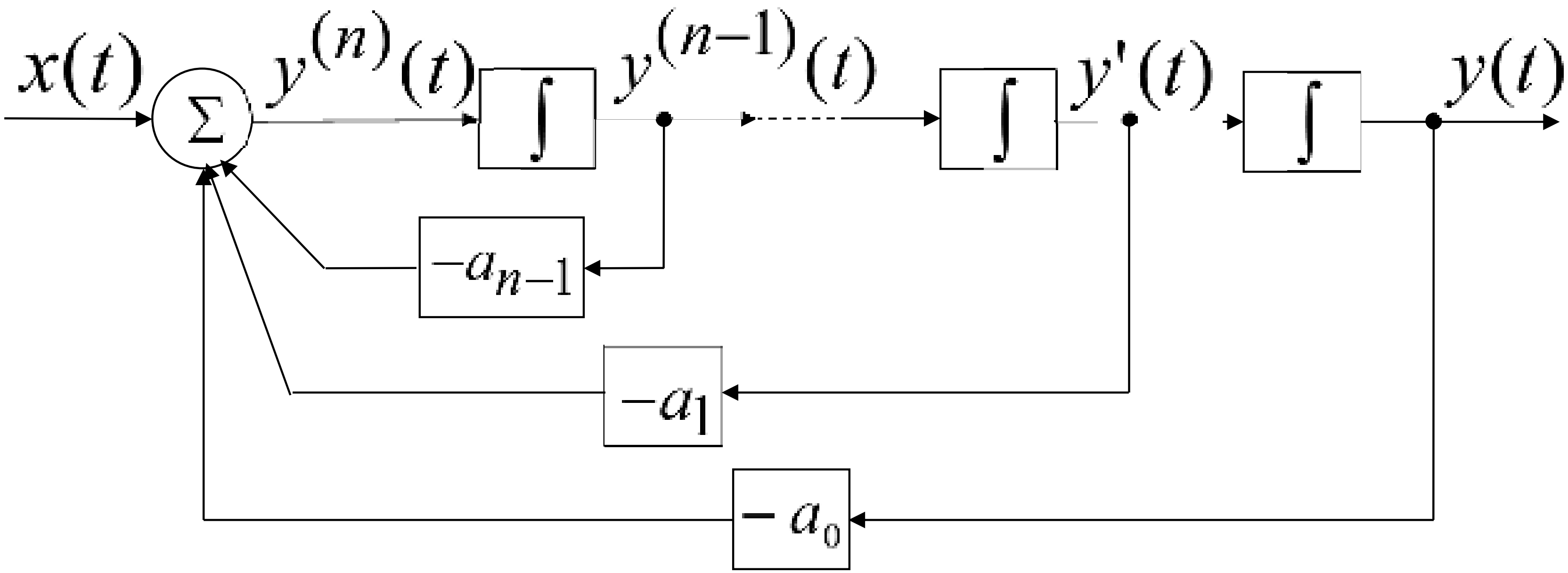
n 阶系统的数学模型为：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=x(t)$$

改写为：

$$y^{(n)}(t)=x(t)-a_{n-1}y^{(n-1)}(t)-\cdots-a_1y'(t)-a_0y$$

画系统模拟图：



4. 一般系统的模拟（以二阶系统为例）

（1）时域模拟图：

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1x'(t)+b_0x(t)$$

假设一个新的二阶系统，其微分方程为：

$$q''(t)+a_1q'(t)+a_0q(t)=x(t) \quad (1)$$

根据线性时不变系统的特性，有：

$$[b_0q(t)]''+a_1[b_0q(t)]'+a_0[b_0q(t)]=b_0x(t)$$

$$[b_1q(t)]''+a_1[b_1q(t)]'+a_0[b_1q(t)]=b_1x(t)$$

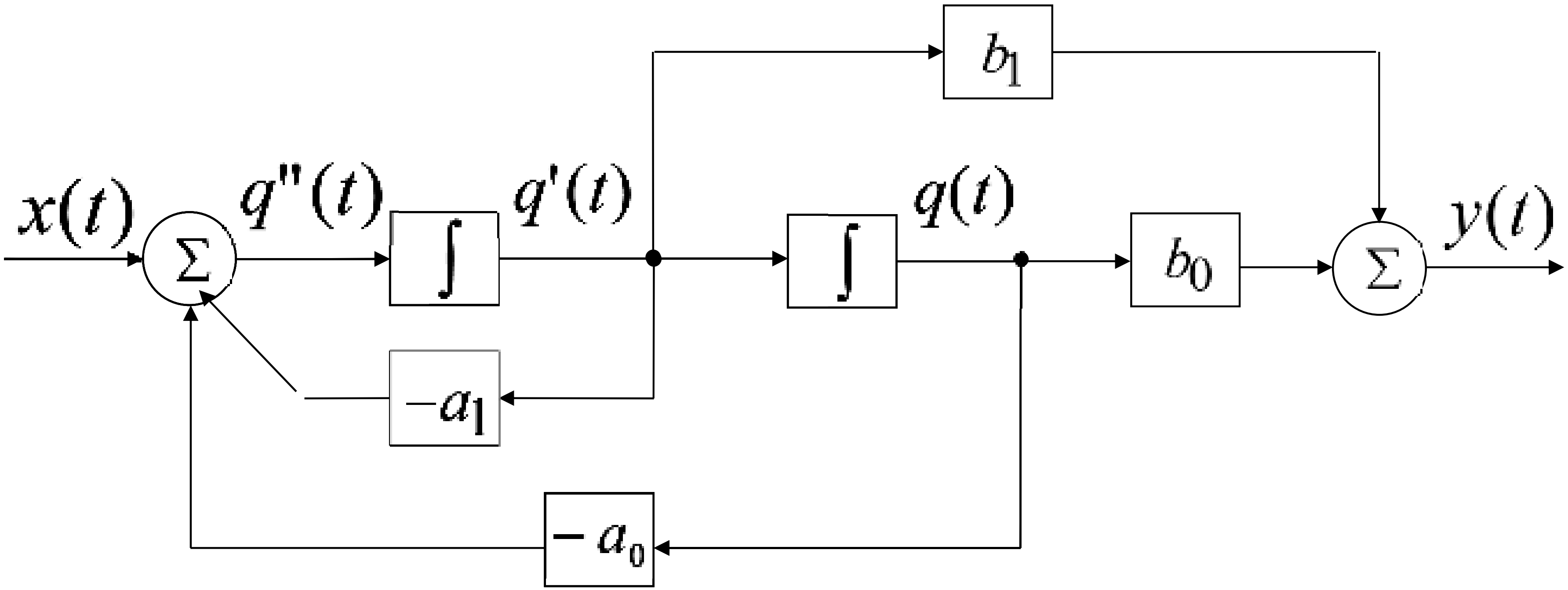
将以上两式相加，并且与原方程对比，得：

$$y(t)=b_1q'(t)+b_0q(t) \quad (2)$$

$$q''(t) + a_1 q'(t) + a_0 q(t) = x(t) \Rightarrow q''(t) = x(t) - a_1 q'(t) - a_0 q(t)$$

$$y(t) = b_1 q'(t) + b_0 q(t)$$

画系统模拟图：



（对于高阶系统的情况，可以此类推）

（2）复频域模拟图：

对二阶系统　$y''(t)+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=b_1 x'(t)+b_0 x(t)$

两边取拉氏变换，有

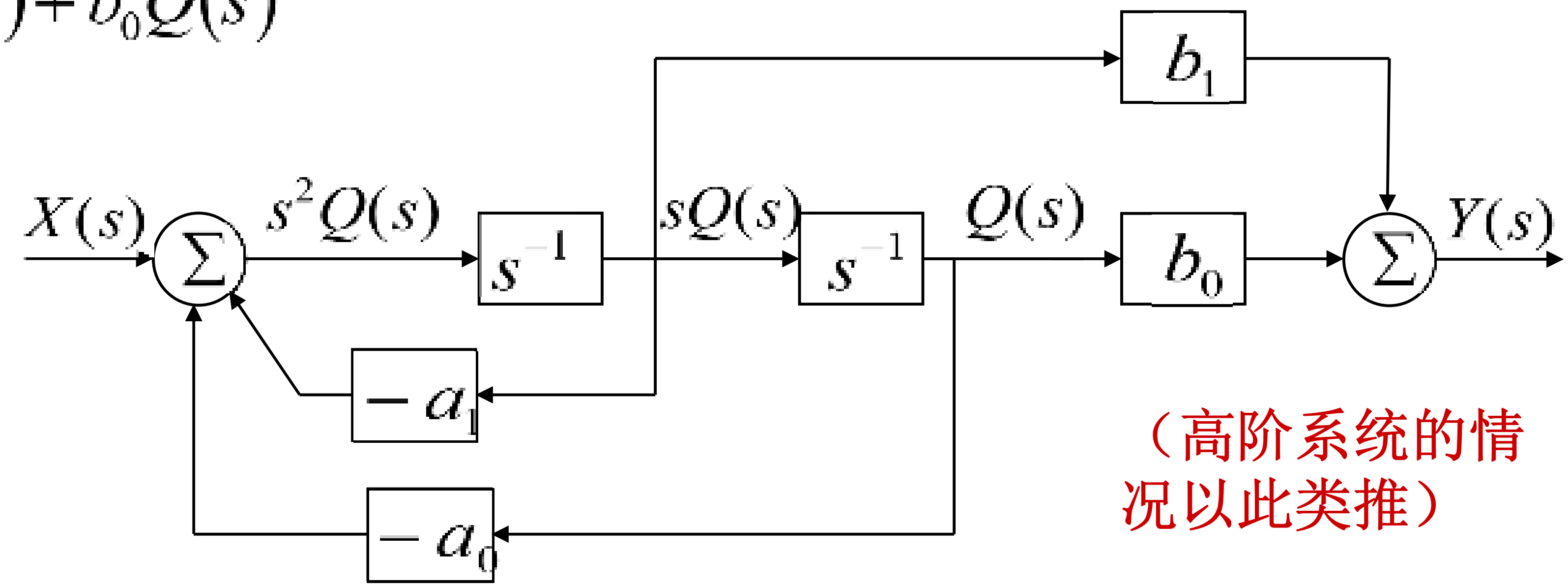
$$s^2 Y(s)+a_1 sY(s)+a_0 Y(s)=b_1 sX(s)+b_0 X(s)$$

设中间变量 $Q(s)$，使之满足方程

$$s^2 Q(s)+a_1 sQ(s)+a_0 Q(s)=X(s) \Rightarrow s^2 Q(s)=X(s)-a_1 sQ(s)-a_0 Q(s)$$

$$Y(s)=b_1 sQ(s)+b_0 Q(s)$$

画系统模拟图：



（高阶系统的情况以此类推）

例：已知某系统的微分方程如下，试画出其模拟图。

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)+3x(t)$$

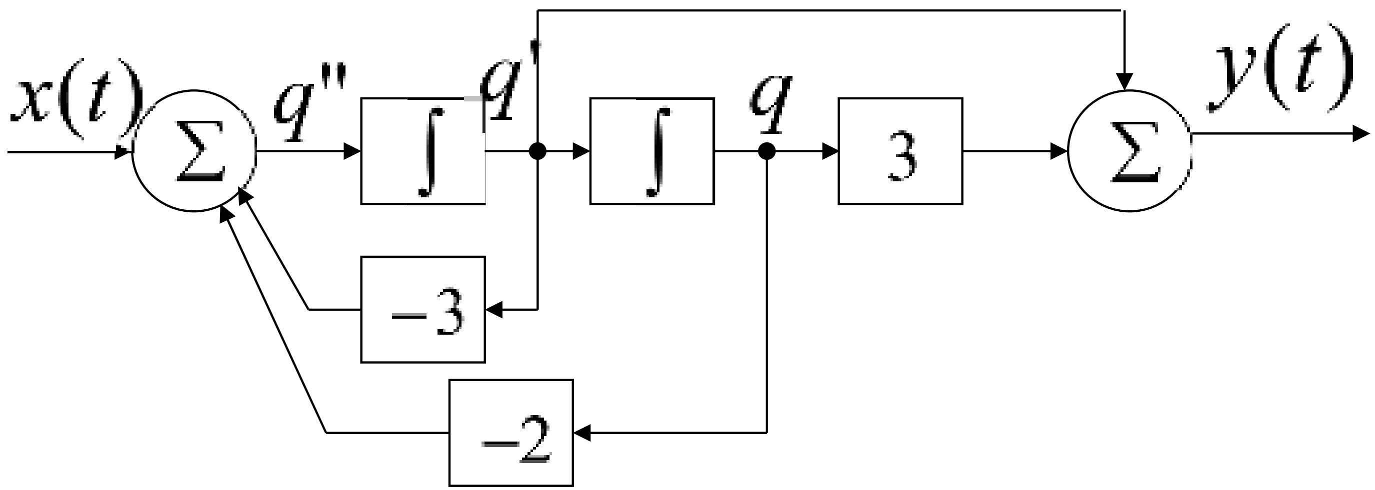
解：设辅助函数$q(t)$，得到两个方程：

$$q''(t)+3q'(t)+2q(t)=x(t)$$

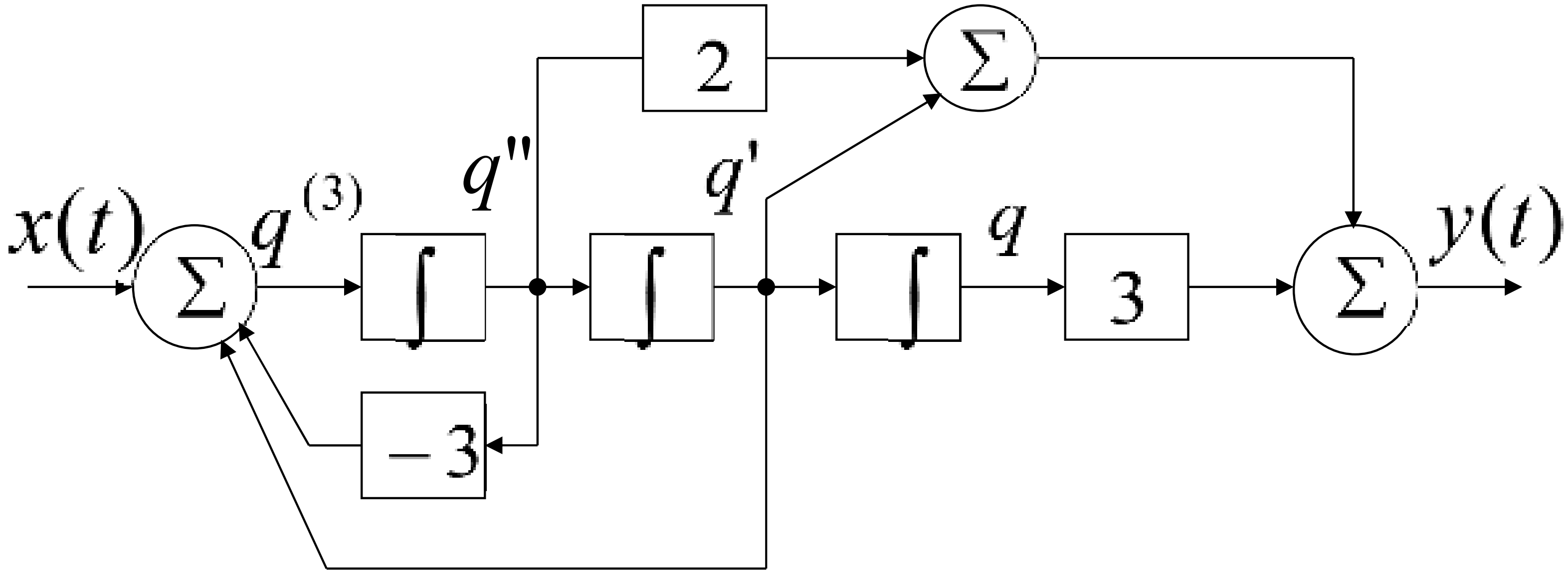
$$y(t)=q'(t)+3q(t)$$

改写第一个方程为：$q''(t)=x(t)-3q'(t)-2q(t)$

系统模拟图：



例：已知某系统的模拟图如下，试列写描述系统输入输出关系的微分方程。



解：设辅助函数**$q(t)$**如图，得：

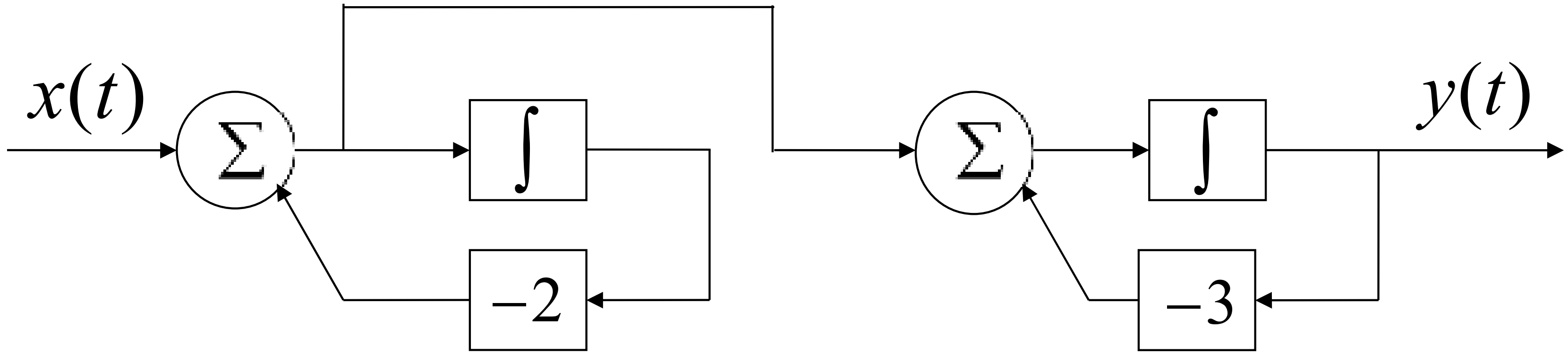
$$q^{(3)}(t) = x(t) - 3q''(t) + q'(t) \Rightarrow q^{(3)}(t) + 3q''(t) - q'(t) = x(t)$$

$$y(t) = 2q''(t) + q'(t) + 3q(t)$$

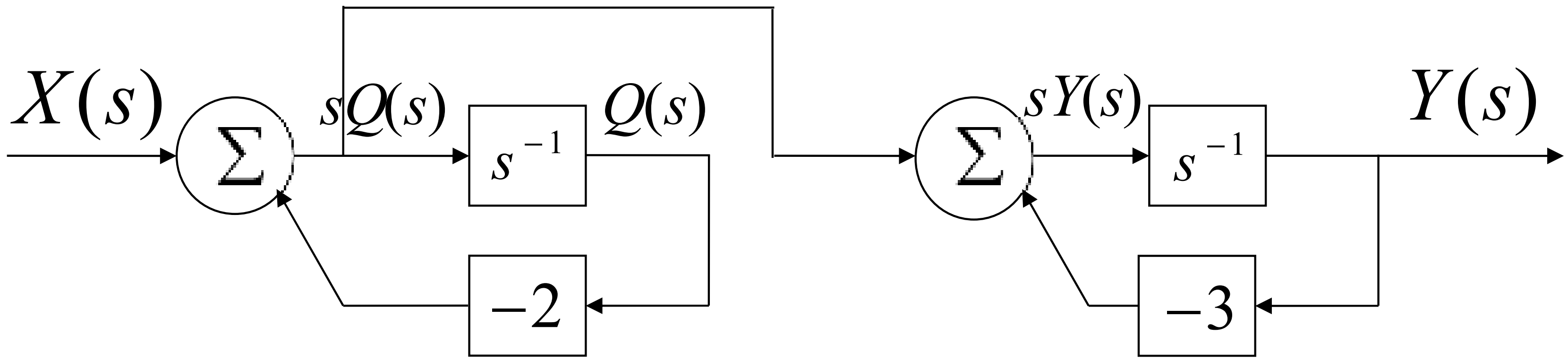
所以得到系统的微分方程为：

$$y^{(3)}(t) + 3y''(t) - y'(t) = 2x''(t) + x'(t) + 3x(t)$$

例： 系统的模拟图如图所示，求系统函数和微分方程。



解：作出对应的复频域模拟图：



$$sQ(s) = X(s) - 2Q(s)$$
$$sY(s) = sQ(s) - 3Y(s)$$

消去中间变量

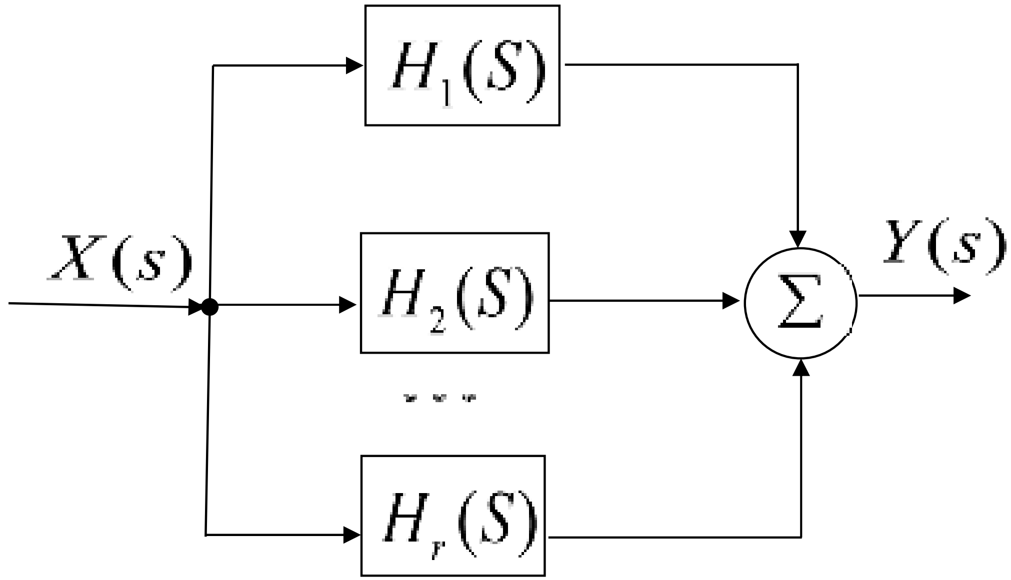
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{(s+2)(s+3)} = H(s)$$

即 $s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = sX(s)$

微分方程为： $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x'(t)$

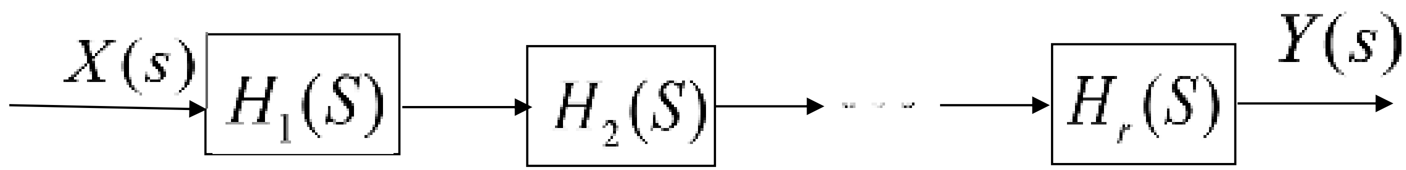
以上讨论的模拟图是根据系统的微分方程或系统函数作出的，一般称为**直接模拟图**。实用中也常常把一个大系统分解成若干个子系统连接的形式构成模拟图。常用的有两种连接方式：

并联模拟：



$$H(s)=H_1(s)+H_2(s)+\cdots+H_\gamma(s)$$

串联模拟：



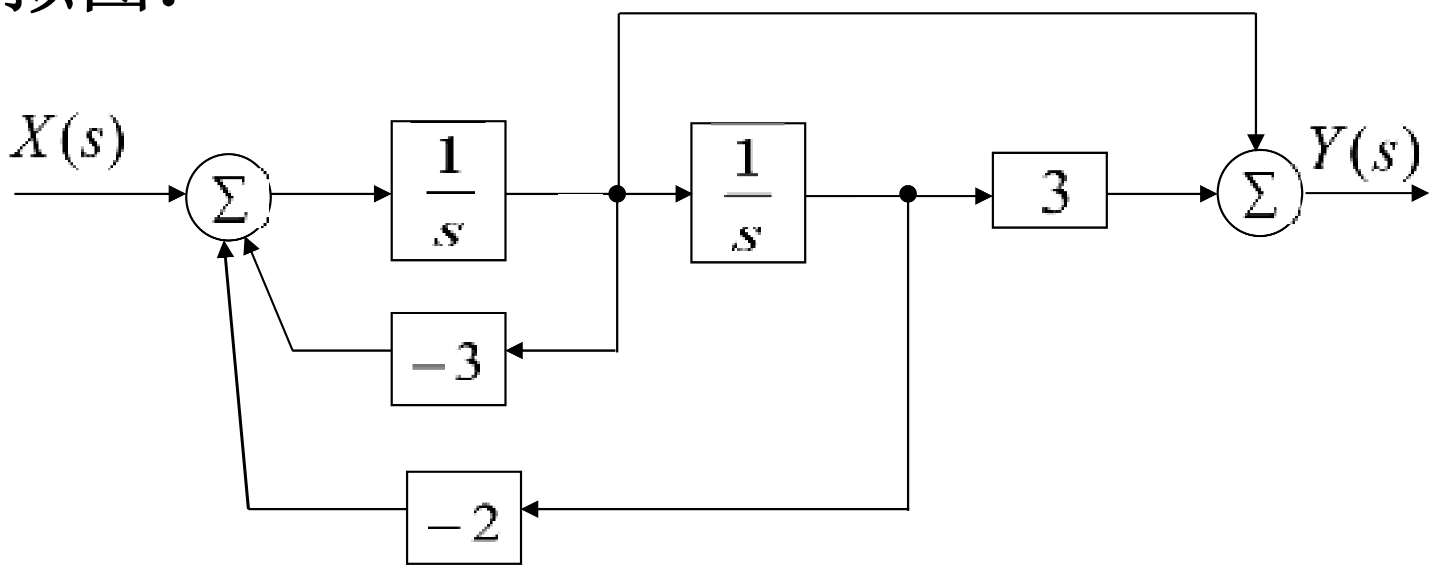
$$H(s)=H_1(s)H_2(s)\cdots H_\gamma(s)$$

例： 已知系统的系统函数 $H(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$，画出其直接模拟图、并联模拟图和串联模拟图。

解： $$H(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

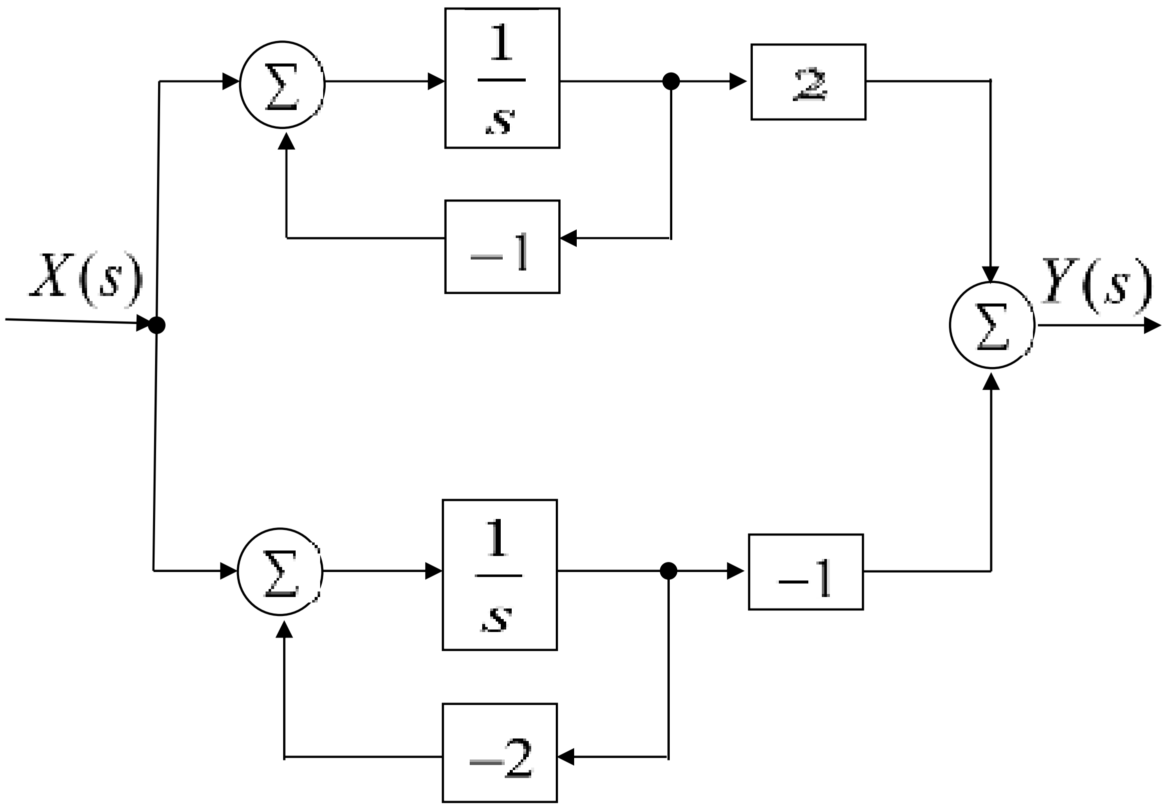
得： $$s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s)=sX(s)+3X(s)$$

其直接模拟图：



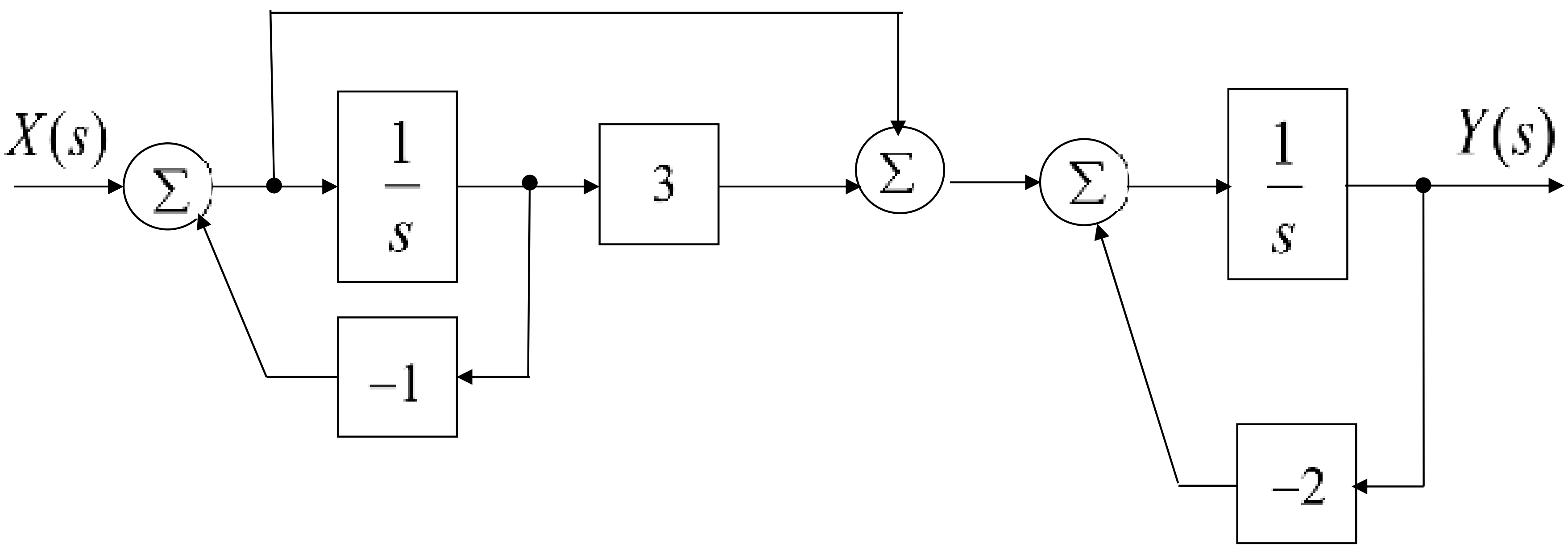
$$H(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

其并联模拟图：



$$H(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+3}{s+1}\cdot\frac{1}{s+2}$$

其串联模拟图：



本章要点

1.典型信号的拉普拉斯变换（表5-1）

2.拉普拉斯变换的性质（表5-2）

3.拉普拉斯反变换：

直接应用典型信号的拉氏变换对及拉氏变换的性质

部分分式展开法：遮挡法、对应项系数相等法、配方法

4.连续系统的复频域分析：

从微分方程求解系统函数及全响应

从电路的复频域模型求解系统函数及全响应

5.系统函数的极点与冲激响应的模式、系统的稳定性

6. 系统框图的化简和模拟

作 业

5.1–5.2：

5–1(2)(3)，5–2(1)(2)，5–3(2)，

5–4(1)(3)，5–5(1)(3)

5.3：

5–6(2)(3)(6)，5–7(2)(3)(4)，5–9(1)

5.4：

5–10(2)，5–12 ，5–15

5.5：

5–11(b)，5–14，5–16，5–17，5–18

5.6：5–20(1)，5–21(1)